*

Fullstendighetsbevis for den doxastiske setningslogikken Kη og noen relaterte kalkyler

av

Morten Rognes

2007

*

Den doxastiske setningslogikken Kη

§1 Innledning

I arbeidet Rognes[1], *Noen syntaktiske derivasjoner i den doxastiske predikatlogikken Kη og enkelte beslektede kalkyler*, betraktet vi den doxastiske predikatlogikken Kη og en rekke utvidelser av denne.[1]

I dette arbeidet skal vi studere den setningslogiske reduksjonen av denne teorien, dvs. den kalkylen man får når alt som har med kvantorer, identitet og predikater å gjøre fjernes og man derfor sitter igjen med det rent setningslogiske skjelettet av kalkylen Kη. Hovedformålet med dette arbeidet er å tilveiebringe en semantisk teori, dvs. en modellteori for disse setningslogiske kalkylene. Dette innebærer at vi vil angi et kriterium for når en formel i det setningslogiske språket er gyldig. Dernest ønsker vi å gi et detaljert bevis for at den grunnleggende kalkylen Kη er fullstendig. Vi vil også gjøre dette for de forskjellige utvidelsene av Kη som vi betrakter. Semantikken som presenteres for kalkylene som studeres her er en variant av den tradisjonelle Kripke-semantikken for modallogiske systemer. Fullstendighetsbevisene er standardpregede Henkin-bevis.

Selvom vi skal gi en formell presentasjon av kalkylene vi ønsker å studere vil vi likevel i denne innledningen si noen ord om språket til kalkylene og de grunnleggende aksiomskjemaene og slutningsreglene som inngår i dem.

Språket til den predikatlogiske versjonen av Kη inneholdt den setningsdannende konstruksjonen på en term og en formel, "x tror at α". Vi betegnet denne konstruksjonen med "T;x(α)". I tillegg hadde vi i språket det spesielle predikatet "η(x)" som forkortet det lengere uttrykket " x er en person hvor mengden av alle de utsagn som beskriver forhold vedkommende tror er tilfelle inneholder alle logiske sannheter, er konsistent og lukket under logisk konsekvens og endelig konjunksjon". Med denne lesemåten av predikatet "η(x)" er det klart at en formel som for eksempel,

$$\eta(x) \rightarrow (T;x(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T;x(\alpha)\ \&\ T;x(\beta))$$

uutrykker noe som er ytterst plausibel.

I den setningslogiske versjonen av Kη inneholder språket bare en tellbart uendelig mengde med utsagnsvariabler, p;1, p;2, ... etc. For enhver slik utsagnsvariabel kan man sette inn en setning som enten er sann eller usann. I tillegg til disse utsagnsvariablene inneholder språket en setningslogisk konstant η. Denne representerer en formel og får en konstant intepretasjon i alle modeller for språket. I tillegg til disse elementene inneholder språket de vanlige setningslogiske konnektivene og den formeldannende konstruksjonen T på formler. Er α en formel er også T(α) en formel.

Hvordan skal nå operatoren T og konstanten η leses innenfor denne rammen? En setning av typen "T(α)" tenker vi oss at vi leser "a tror at α" der a overalt må forstås som en på forhånd fiksert konstant, for eksempel "Napoleon", "Alfred Tarski", eller lignende. Konstanten η tenker vi oss at leses på den følgende måte: "Mengden av alle de utsagn a tror

[1] Selvom dette arbeidet stort sett står på egne ben, er det likevel en fordel om leseren har lest, og satt seg skikkelig inn i, Rognes [1]

er tilfelle inneholder alle logiske sannheter, er logisk konsistent, og er lukket under logisk konsekvens og endelig konjunksjon". Naturligvis er her a samme konstant som i "a tror at α". Leser man for eksempel "T(α)" som "Napoleon tror at α" må man over alt lese "η" som "Mengden av alle de utsagn Napoleon tror er tilfelle inneholder alle logiske sannheter, er logisk konsistent, og er lukket under logisk konsekvens og endelig konjunksjon" For a kan man naturligvis velge et annet navn enn "Napoleon". I stedet for å bruke det svært lange uttrykket "Mengden av alle de utsagn a tror er tilfelle inneholder alle logiske sannheter, er logisk konsistent, og er lukket under logisk konsekvens og endelig konjunksjon" skal vi tillate oss å bruke det kortere " Trosfeltet til a er rasjonelt organisert". Dette uttrykket må altså i det følgende tillegges overalt den samme betydning som det lengere uttrykket.

Når det gjelder aksiomene i den setningslogiske versjonen av Kη inneholder denne for det første et standardsett av aksiomer for setningslogikken når denne kun baseres på konnektivene → og ¬. Dessuten inneholder den to aksiomskjemaer for konstruksjonen T. Det dreier seg om:

(1) $\eta\rightarrow T(\alpha\&\beta) \leftrightarrow T(\alpha)\ \&T(\beta)$
(2) $\eta \rightarrow \neg(T(\alpha\&\neg\alpha))$

Hvis vi holder oss til lesemåtene av η og T som ble introdusert ovenfor, hvor vi brukte "Napoleon" i stedet for den ubestemte konstanten a, uttrykker formelen (1) den følgende tanke: Dersom trosfeltet til Napoleon er rasjonelt organisert så er det slik at Napoleon tror at både α og β er tilfelle hvis og bare hvis han for det første tror at α er tilfelle og for det andre tror at β er tilfelle. Dette virker åpenbart rimelig.Hvis Napoleon tror at α er tilfelle, og dessuten tror at β, virker det selvmotsigende å hevde at han ikke tror at både α og β når man forutsetter at trosfeltet hans skal være rasjonelt organisert. Dette innebærer jo nettopp at det skal være lukket under konjunksjon. Det omvendte virker også rimelig siden Napoleons trosfelt er lukket under logisk konskevens dersom det er rasjonelt organisert. Naturligvis er α, såvel som β, er logiske konsekvenser av α&β.

Formelen (2) uttrykker med vår litt eksotiske lesemåte av "η" og "T" at dersom Napoleons trosfelt er rasjonelt organisert er det ikke slik at han tror at både α er tilfelle og ¬α er tilfelle. Også dette ville det være merkelig å benekte siden det forhold at Napoleons er rasjonelt organisert innebærer at det er konsistent.

Når det så gjelder slutningsregler i den setningslogiske versjonen av Kη tar vi med modus ponens, som åpenbart er gyldighetsbevarende, samt de følgende to regler:

R1 $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \eta \rightarrow T(\alpha)$
R2 $\vdash (\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \vdash \eta \rightarrow (T(\alpha) \rightarrow T(\beta))$

Når det gjelder R1 kan man resonnere som følgende i lys av de foreslåtte lesemåtene til η og T: Anta $\vdash \alpha$, dvs. at α er et teorem i kalkylen. Da virker det rimelig å oppfatte α som en logisk sannhet. Men da er det umulig å benekte den påstand at dersom Napoleons trosfelt er rasjonelt organisert så tror han at α. Det forhold at Napoleons trosfelt er rasjonelt organisert innebærer jo nettopp per definisjon at det inneholder alle logiske sannheter.

R2 kan uformelt motiveres på følgende vis: Dersom vi har $\vdash \alpha\rightarrow \beta$ er virker det selvmotsigende å benekte at β er en logisk konsekvens av α. Anta nå at Napoleons trosfelt er rasjonelt organisert. Da er det per definisjon lukket under logisk konsekvens. Men tror Napoleon i så fall at α må Napoleon også tro at β. Dette viser at det er plausibelt å anse regelen R2 som gyldighetsbevarende.

Systemet Kη virker derfor helt igjennom rimelig i lys av lesemåten som vi har fastsatt for alle konnektiver og konstanter.

La oss nå gi en oversikt over innholdet i dette arbeidet. I §1.1 og §2 avgrenser vi formelt språket L til våre kalkyler og angir nøyaktig aksiomer og slutningsregler i setningslogikken Kη. I denne paragrafen definerer vi også kalkylen Kη-, som fremkommer fra Kη ved å fjerne aksiomskjemaet (2) som ble nevnt ovenfor. I tillegg betrakter vi en rekke aksiomskjemaer som kan legges til våre kalkyler. Vi betegner disse B1, B4-B9. Det har en viss prinsipiell og teoretisk interesse å betrakte disse skjemaene.

Dernest følger i §3 en redegjørelse for semantikken til Kη. Det defineres hva som menes med en modell for språket L og hva som menes med at en formel i språket er gyldig i en modell. En formel som er gyldig i alle modeller kalles gyldig. I dette avsnittet gir vi også et detaljert bevis for at alle aksiomene i systemet Kη er gyldige og at slutningsreglene R1 og R2 er gyldighetsbevarende. Det samme gjøres for systemet Kη-.

I §4 innføres begrepet 'maksimalt konsistent formelmengde'. Vi gir her et bevis for Lindenbaums sats om at enhver konsistent formelmengde kan utvides til en maksimal sådan, dessuten beviser vi en viktig sats om egenskaper til maksimalt konsistente formelmengder. Intet av stoffet i denne paragrafen er av original karakter. I §5 gjennomfører vi et bevis for fullstendigheten av Kη etter det mønster man finner i Hughes & Cresswell [1].

I §6 gir vi en alternativ og bedre definisjon av begrepet om en kanonisk modell etter forbilde av fremstillingen i Chellas [1]. Deretter gir vi et nytt fullstendighetsbevis for fullstendigheten til Kη med en litt annen struktur enn det som ble gitt i §5. I §6 beviser vi også at det svakere systemet Kη- er fullstendig.

§1.1 Formell avgrensning av språket til setningslogikken Kη

Vi skal første avgrense språket til setningslogikken Kη. Vi kaller dette språket L. Vokabularet til L består av de følgende uttrykk: (i) Setningskonstanten η. (ii) En tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver: p;1,....,p;n,..... (iii) De setningslogiske konnektivene → og ~. (iv) Den monadiske setningsoperatoren T. (v) De vanlige parantestegnene.

De velformede formlene i L er avgrenset på den forventede måten ved de følgende regler: (i) Enhver setningsbokstav eller setningskonstant er en velformet formel. (ii) Er α og β velformede formler er (~α), (α→β) og T(α) velformede formler. (iii) Ingen andre formler enn dem som er det etter reglene (i) og (ii) er velformede formler.

Vi betegner mengden av velformede formler i språket L med Fm(L).
Når det gjelder de andre vanlige setningslogiske konnektivene innføres disse ved de følgende definisjoner:

(a) $\alpha \vee \beta = (\sim\alpha) \rightarrow \beta$
(b) $\alpha \,\&\, \beta = \sim(\alpha \rightarrow (\sim\beta))$
(c) $\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \rightarrow \alpha)$

§2 Aksiomer og slutningsregler i setningslogikken Kη

Når det gjelder setningslogikken Kη benytter vi et vanlig sett av aksiomer for de setningslogiske konnektivene. Et sett av slike aksiomer som det er velkjent at er adekvate når → og ~ er de eneste primitive setningslogiske konnektivene er det følgende:

PL1 $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$
PL2 $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma).\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma)$
PL3 $(\sim\beta)\rightarrow(\sim\alpha).\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$

Vi skal benytte disse. I tillegg tar vi med de følgende to aksiomer for operatoren T:

A1 $\eta\rightarrow.\ T(\alpha\&\beta)\leftrightarrow T(\alpha)\ \&\ T(\beta)$
A2 $\eta\rightarrow\sim T(\alpha\ \&\sim\alpha)$

Systemet inneholder de følgende slutningsregler: modus ponens samt de to reglene:

R1 $\vdash\alpha\ \rightarrow\ \vdash\eta\rightarrow T(\alpha)$
R2 $\vdash\alpha\rightarrow\beta\ \rightarrow\vdash\eta\rightarrow.\ T(\alpha)\rightarrow T(\beta)$

De aksiomskjemaene og de slutningsreglene vi har nevnt er de eneste som inngår i logikken Kη.

Vi skal imidlertid se på endel utvidelser av kalkylen Kη. Det dreier seg om de kalkylene vi får når vi legger til et eller flere av de følgende aksiomskjemaer til kalkylen Kη.

B1 $\eta\rightarrow T(\eta)$
B4 $\eta\rightarrow T(\alpha)\rightarrow T(T(\alpha))$
B5 $\eta\rightarrow T(T(\alpha))\rightarrow T(\alpha)$
B6 $\eta\rightarrow T(T(\alpha)\rightarrow\alpha)$
B7 $\eta\rightarrow T(\alpha\rightarrow T(\alpha))$
B8 $\eta\rightarrow T(\alpha\leftrightarrow T(\alpha))$
B9 $\eta\rightarrow T(\alpha)\text{v}\ T(\sim\alpha)$[2]

Vi skal også ta i betraktning den kalkylen vi får nå vi fjerner aksiomskjemaet A2 fra kalkylen Kη og bare beholder A1. Denne kalkylen kaller vi Kη-. I det følgende skal vi betrakte enhver kalkyle S som fremkommer fra Kη- ved å utvide denne kalkylen med et eller flere av aksiomskjemaene A2, B1, B4 - B9.

Med et bevis i språket L forstår vi her en endelig sekvens av formler α;1,...,α;n der n>=1 som oppfyller det følgende krav: For hvert j der 1=< j =< n har vi enten at α;j er en instans av et aksiomskjemaene vi har nevnt, eller at α;j er sluttet fra to tidligere formler i rekken ved hjelp av modus ponens, eller at α;j er sluttet fra en tidligere formel i rekken ved hjelp av enten regelen R1 eller regelen R2. Vi sier at en formel β er bevisbar i kalkylen S hvis og bare hvis det finnes et bevis i L, α;1,..., α;n der β=α;n og de aksiomskjemaene som har blitt brukt utelukkende er aksiomskjemaene i S. Utrykket "S |- β" brukes som forkortelse for "β er

[2] Man ser at disse skjemaene er setningslogiske versjoner av de tilsvarende aksiomskjemaene B1, B4 -B9 som ble nevnt i Rognes[1], §6. Man kan undres over hvorfor vi ikke tar med de setningslogiske versjonene av aksiomskjemaene B2 og B3 som ble nevnt der. Grunnen er at det til skjemaene B1, B4 - B9 svarer visse naturlige krav som kan pålegges alternativrelasjonen i de modellene for L som vi vil definere i den neste paragrafen. Det viser seg langt vanskeligere å formulere noen naturlige krav av denne typen når det gjelder skjemaene B2: $T(\alpha)\rightarrow T(T(\alpha))$ og B3: $T(T\alpha))\rightarrow T(\alpha)$. De fullstendighetsresultatene vi senere skal gi bevis for er derfor noe fragmentariske. Dette er imidlertid ikke noen katastrofe. Det viser bare at det er problemer på dette felt som det gjenstår å løse. En fullstendig analyse av alle de kalkylene som oppstår når Kη eller Kη- utvides med en vilkårlig kombinasjon av skjemaene B1 - B9, samt B4 - B9 når man sløyfer klausulen "η→" er utvilsomt en svært omfattende affære. Det har ikke vært vår hensikt å gjennomføre noe slikt i dette skrift. Vi skal imidlertid gi mer omfattende kommentarer til disse forhold i §7 og §8.

bevisbar i setningslogikken S". Er det opplagt fra sammenhengen hvilket system det er vi arbeider med skriver vi bare "|-α"

Definisjon 2.1 Vi sier at en formelmengde Δ i L er konsistent i systemet S hvis og bare hvis det ikke finnes noen formler α;1,....,α;n êL slik at S |- ~(α;1&...&α;n)

§3 Modellteori for setningslogikken Kη.

Vi gir først en definisjon av hva vi forstår med en modell for språket L.

Definisjon 3.1 Med en modell M for språket L forstås et tuple M=<W,R,q,f, V> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) W er en ikke-tom mengde. De enkelte elementene kalles punktene i modellen.
(ii) R er en relasjon over W, det vil si at R Inkl WxW
(iii) q er en delmengde av W som ikke nødvendigvis må være ikke-tom
(iv) f er en funksjon som tilordner ethvert element i W-q en mengde av formler i L.
(v) V er en funksjon som tilordner setningskonstanten η mengden q og som tilordner enhver av setningsvariablene en delmengde av W

Vi kaller klassen av modeller M=<W,R,q,f,V> for L der R i tillegg til kravet (ii) også oppfyller det følgende krav: (Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy)) for klassen av Kη-modeller for L.

Vi skal nå definere hva som menes med at en formel α er sann i en modell M ved punktet w. Vi bruker "(M,w) ⊨ α" som forkortelse for "α er sann i modellen M ved punktet w"

Definisjon 3.2 Anta M=<W,R,q,f,V> er en modell for L. Anta wêW. Da defineres (M,w) ⊨α induktivt ved lengden på formler på følgende måte:

(i) (M,w) ⊨ p;i ↔ wêV(p;i)
(ii) (M,w) ⊨ η ↔ wêV(η)=q
(iii) (M,w) ⊨ α → β ↔ ((M,w) ⊨ α → (M,w) ⊨ β)
(iv) (M,w) ⊨ ~α ↔ ~((M,w) ⊨ α)
(v) (M,w) ⊨ T(α) ↔ (wêq & (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α))
v (wê(W-q) & αê f(w))

Dette avslutter definisjonen.

Definisjon 3.3 Vi sier at en formel α er gyldig i klassen K av modeller for L, i symboler K ⊨ α, hvis og bare hvis vi har for enhver modell M=<W,R,q,f,V> som er med i K at (M,w) ⊨α holder for alle wêW

Man kan vise at enhver formel som er bevisbar i Kη også er gyldig i enhver Kη-modell for L. Vi har altså:

Teorem 3.1: (Gyldighetsteorem) Er α en formel i L har man at Kη |- α er α gyldig i enhver Kη-modell for L

Bevis: For å vise at dette teoremet holder er det nok å vise at alle aksiomene i Kη er gyldige og at slutningsreglene bevarer gyldighet.

(a). Når det gjelder de setningslogiske aksiomene PL1- PL3 er det svært enkelt å vise at disse er gyldige i kraft av klausulene (iii) og (iv) i Definisjon 3. Vi gjennomfører derfor ikke beviset i detalj.

(b) Vi må vise at aksiomet A1 er gyldig. Anta derfor M=<W,R,q,f,V> er en modell for L og at w er et vilkårlig element i W. Det vil være tilstrekkelig å vise at dersom (1) (M,w) ⊨ η så har man

(2) (M,w) ⊨ T(α&β) ↔ (M,w) ⊨ T(α) & (M,w) ⊨T(β).

Anta derfor at (1) holder, og dessuten at (3) (M,w) ⊨ T(α&β) holder, for å vise at (M,w) ⊨ T(α) & (M,w) ⊨T(β). Fra (1) følger ved hjelp av klausul (ii) i Definisjon 3 at (4) wêq. Fra (3) og den siste klausulen i Definisjon 3 følger:

(5) (wêq & (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α&β)) v (wê(W-q) & αê f(w)).

Fra dette og (4) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(6) (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α&β)

Siden vi åpenbart må ha (M,w) ⊨α&β → (M,w) ⊨α & (M,w) ⊨ β for alle wêW følger fra (6) og (4):

(7.1) wêq & (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨ α)

(7.2) wêq & (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨ β)

Herav har vi så ved hjelp av den siste klausulen i Definisjon 3 at (M,w) ⊨ T(α) og (M,w) ⊨T(β). Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (2) holder gitt at (1) holder.

Anta nå at (1) holder og at (8) (M,w) ⊨ T(α) & (M,w) ⊨T(β) holder. Vi ønsker å vise at venstre side i (2) holder. Fra (8) og Definisjon 3 følger, siden vi i lys av (1) må ha wêq, at

(9.1) wêq & (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨ α)

(9.2) wêq & (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨ β)

Herav følger: (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α&β). Men fra dette, det at wêq og den siste klausulen i Definisjon 3 følger åpenbart (M,w) ⊨ T(α&β). Dermed har vi vist at aksiomet A1 er gyldig.

(c) Vi må også vise at A2 er gyldig. Anta M=<W,R,q,f,V> er en vilkårlig modell for L, og at w er et vilkårlig element i W. Det vil da være tilstrekkelig å vise:

(10) (M,w) ⊨ η → ~(M,w) ⊨ T(α&~α). Anta derfor for reduktio ad absurdum at

(11) (M,w) ⊨ η & (M,w) ⊨ T(α&~α). Fra den første konjunkten i (11) og Definisjon 3, klausul (ii), følger (12) wêq. Fra den andre konjunkten og Definisjon 3 har man i lys av (12) at (13) (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α& ~α) Fra klausulene for de setningslogiske konnektivene i Definisjon 3 utleder man lett (14) ~(Ew)(wêW & (M,w) ⊨α& ~α). Dette og (13) impliserer: ~(Ew')(w'êW & wRw'). Men siden wêW strider dette mot klausul (ii) i definisjonen av modell. Det følger at det er umulig at (11) kan holde. Dette viser at A2 er gyldig.

(d). Det er forholdsvis liketil å bevise at modus ponens bevarer gyldighet. Anta (14) ⊨ α og (15) ⊨ (α→β). Vi må vise ⊨ β. Anta derfor M=<W,R,q,f,V> er en vilkårlig modell for L og at w er et vilkårlig element i W. Fra (14) og (15) følger da (16) (M,w) ⊨ α & (M,w) ⊨ (α→β) Men fra dette og valuasjonsreglene for de setningslogiske konnektivene i Definisjon 3 har vi umiddelbart (M,w) ⊨ β. Dette viser at modus ponens bevarer gyldighet.

(e) Vi må vise at regelen R1 bevarer gyldighet. Anta derfor (17) ⊨α. Vi må da vise at ⊨ η→ T(α). Anta derfor M=<W,R,q,f,V> er en vilkårlig modell for L og at w er et vilkårlig element i W. Det vil da være nok å vise: (M,w) ⊨ η → (M,w) ⊨ T(α). Anta derfor: (18) (M,w) ⊨ η . Herav følger ved hjelp av Definisjon 3 at (16) wêq. Fra (17) følger: (Aw)(wêW → (M,w) ⊨ α). Men fra dette følger mer spesielt:

(19) (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w) ⊨ α). Fra (18) og (19) har vi så ved hjelp av Definisjon 3 det vi ønsker, nemlig: (M,w) ⊨ T(α). Dette viser at R1 bevarer gyldighet.

(f) Endelig må det bevises at R2 bevarer gyldighet. Anta (20) ⊨(α→β). Det er da nødvendig å vise (21) ⊨ η→ (T(α) →T(β)). For å bevise (21) anta at M=<W,R,q,f,V> er en vilkårlig modell og at w er et vilkårlig element i W. Anta videre (22) (M,w) ⊨ η og (23) (M,w) ⊨ T(α). Det vil da være nok å vise at (M,w) ⊨ T(β). Fra (22) følger : (24) wêq i lys av Definisjon 3. Videre følger fra (23) ved hjelp av (24) og Definisjon 3 at: (25) (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α)). Nå følger ved hjelp av (20) og Definisjon 3: (26) (Aw')(w'êW →. (M,w') ⊨α → (M,w') ⊨β) Fra dette følger i sin tur: (27) (Aw')(w'êW& wRw' → (M,w') ⊨α → (M,w') ⊨β). Men fra dette og (25) følger åpenbart: (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α)), som sammen med (24) og den siste klausulen i Definisjon 3 gir oss det vi ønsker, nemlig: (M,w) ⊨ T(β). Dette viser at R2 er gyldighetsbevarende.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Man ser at dersom vi fjerner kravet (Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy)) fra punkt (ii) i definisjonen av modell får man en litt mer omfattende klasse av modeller. Det skulle være enkelt å se at i denne klassen av modeller holder ikke lenger A2. A1 er imidlertid fortsatt gyldig. Fra beviset ovenfor fremgår det at vi har:

Teorem 3.2: (Gyldighetsteorem) Er α en formel i L har man at Kη- |- α er α gyldig i enhver modell for L

§4 Maksimalt konsistente mengder i L

Definisjon 4.1: Vi sier at en formelmengde Δ i L er konsistent i kalkylen S, kortere Δ er S-konsistent, hvis og bare hvis det ikke finnes noen formler α;1,...,α;n (n>=1) som er med i Δ slik at S |- ~(α;1&...&α;n)

Definisjon 4.2: Med en maksimalt S-konsistent formelmengde Δ i L forstår vi en S-konsistent formelmengde Δ som er slik at det ikke finnes noen formel α som ikke er med i Δ som kan legges til Δ slik at den mer omfattende mengde blir S-konsistent. Vi bruker "Max;k(Δ)" som forkortelse for uttrykket "Δ er en maksimalt konsistent setningsmengde". Er det viktig å vise hvilket system Δ er maksimalt konsistent med hensyn på skriver vi: "S-Max;k(Δ)"

Den følgende sats er svært viktig fordi den viser at enhver konsistent formelmengde i L kan utvides til en maksimalt konsistent formelmengde.

Lemma 4.1 (Lindenbaums sats) Anta Δ er en konsistent formelmengde i L. Da finnes det en maksimalt konsistent formelmengde i L, Γ, som inneholder Δ ie. der: Δ Inkl Γ.

Bevis: Anta at (1) Δ er konsistent formelmengde. Siden mengden av formler i L er tellbart uendelig finnes det en opptelling α;0, α;1,..... av formlene i L. Dette innebærer at (2) (Aβ)(βêFm(L) → (En)(nêNat & β= α;n). Vi definerer nå en induktivt en sekvens av formelmengder Δ;n, for nêNat, ved følgende to klausuler:

(3.1) $\Delta;0 = \Delta$

(3.2) Er n>=0 og er $\Delta;n \cup \{\alpha;n\}$ konsistent setter man $\Delta;(n+1) = \Delta;n \cup \{\alpha;n\}$ ellers setter man $\Delta;(n+1) = \Delta;n$

Man kan nå vise at

(4) *For ethvert naturlig tall n >=0 har man at Δ;n er konsistent.*

Denne påstanden bevises ved induksjon. Er n=0 har man at $\Delta;0 = \Delta$. Men da er $\Delta;0$ konsistent ifølge (1). Anta som induksjonshypotese at $\Delta;n$ er konsistent. Man må da vise at $\Delta;(n+1)$ er konsistent. Er $\Delta;n \cup \{\alpha;n\}$ konsistent har vi at $\Delta;(n+1)$ åpenbart må være konsistent, siden man ifølge (3.2) har at $\Delta;(n+1) = \Delta;n \cup \{\alpha;n\}$ i dette tilfelle. Er $\Delta;n \cup \{\alpha;n\}$ inkonsistent har man ved hjelp av (3.2) at $\Delta;(n+1)=\Delta;n$. Men ifølge induksjonshypotesen er $\Delta;n$ konsistent. I dette tilfelle må også $\Delta;(n+1)$ være konsistent. Dette viser at (4) holder.

Det skulle også være nokså klart at vi har:

(5) $(\forall n)(n,m \in Nat \ \& \ m =< n \rightarrow \Delta;m \text{ Inkl } \Delta;n)$.

Dette kan bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: n=0. Da har vi, om m=<n, at m=0. Siden det er trivielt at $\Delta;0$ Inkl $\Delta;0$ holder satsen i dette tilfellet.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n, ie at:

(5.1) $(\forall m)(m \in Nat \ \& \ m =< n \rightarrow \Delta;m \text{ Inkl } \Delta;n)$. Nå har man fra (3.2) at

(5.2) $\Delta;n$ Inkl $\Delta;(n+1)$. Fra (5.1) og (5.2) følger da :

$(\forall m)(m \in Nat \ \& \ m =< n \rightarrow \Delta;m \text{ Inkl } \Delta;(n+1))$ Dette viser at (5) holder.

Vi setter nå: (6) $\Gamma = UN/j,0,n/(\Delta;n)$. Det er nødvendig å vise at Γ er en maksimalt konsistent utsagnsmengde. Vi må da vise at Γ er konsistent og, dersom β er en formel som ikke er med i Γ, så er $\Gamma \cup \{\beta\}$ inkonsistent. (Jmf. definisjonen av maksimalt konsistent formelmengde).

Anta at Γ er inkonsistent. Da finnes det per definisjon formler $\beta;1,...,\beta;n \in \Gamma$ slik at (7) $\vdash \sim(\beta;1 \& ... \& \beta;n)$. Fra (6) følger, siden $\beta;i \in \Gamma$, at det finnes et naturlig tall k;i slik at $\beta;i \in \Delta;(k;i)$. La q være det største av disse tallene k;i ettersom i gjennomløper {1,...,n}. Da har vi ved hjelp av (5), siden de diverse k;i =<q, at $\beta;i \in \Delta;(k;i)$ Inkl $\Delta;q$ for $i \in \{1,...,n\}$. Dette innebærer at $\{\beta;1,...,\beta;n\}$ Inkl $\Delta;q$. Men fra dette, (7) og definisjonen av konsistent formelmengde følger at $\Delta;q$ er inkonsistent. Dette strider mot (4). Vi konkluderer derfor med:

(8) Γ er konsistent.

Anta nå for reduktio at absurdum at β er en formel der vi har (9) $\sim(\beta \in \Gamma)$ og dessuten (10) $\Gamma \cup \{\beta\}$ er konsistent. I lys av (2) følger det at (11) $\beta = \alpha;n$ for noe naturlig tall n. Fra (10) følger, siden $\Delta;n$ Inkl Γ, at (12) $\Delta;n \cup \{\beta\}$ er konsistent. Men da har vi ved hjelp av (3.2):

(13) $\beta \in \Delta;n \cup \{\beta\} = \Delta;n \cup \{\alpha;n\} = \Delta;(n+1)$ Inkl Γ.

Men dette strider åpenbart mot (9) Vi har derfor, for alle β som ikke er med i Γ, at $\Gamma \cup \{\beta\}$ er inkonsistent. Fra dette og (8) følger det at Γ er maksimalt konsistent. Siden $\Delta = \Delta;0$ Inkl Γ følger det at satsen holder. **QED.**

I det følgende har vi bruk for en rekke egenskaper ved maksimalt konsistente mengder. De viktigste av disse er sammenfattet i den følgende hjelpesetning.

Lemma 4.2 (Lemma om egenskaper ved maksimale mengder) Anta Δ er en maksimalt konsistent mengde i L. Da gjelder følgende for alle formler α,β,γ i L:

(i) $\sim(\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ (\sim\alpha)\hat{e}\Delta)$
(ii) $(\sim\alpha)\ \hat{e}\Delta \ v\ \alpha\ \hat{e}\Delta$
(iii) $K\eta \mid\!\!- \alpha \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta$
(iv) $\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta$
(v) $K\eta \mid\!\!- (\alpha \rightarrow \beta) \ \& \ \alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta$

Bevis: Anta at forutsetningene i teoremet holder.

Ad (i): Anta for reduktio ad absurdum at (1) $\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ (\sim\alpha)\hat{e}\Delta$. Det følger da umiddelbart at (2) $\{\alpha, \sim\alpha\}$ Inkl Δ. Nå har man som et ytterst elemntært setningslogisk teorem at
(3) $\mid\!\!- \sim(\alpha \& (\sim\alpha))$. Fra dette og definisjonen av konsistent utsagnsmengde følger at $\{\alpha, \sim\alpha\}$ er en inkonsistent utsagnsmengde. Men siden (2) holder må også Δ være en inkonsistent utsagnsmengde. Men dette strider mot forutsetningen om at Δ er maksimalt konsistent. Det følger at (1) er umulig. Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii): Anta for reduktio ad absurdum at (1) $\sim((\sim\alpha)\hat{e}\Delta) \ \& \ \sim(\alpha \hat{e} \Delta)$. Fra (1) følger selvfølgelig (2) $\sim((\sim\alpha)\hat{e}\Delta)$. Siden Δ etter forutsetningen er en maksimalt konsistent utsagnsmengde følger det i lys av (2) at $\Delta U\{\sim\alpha\}$er inkonsistent. Dette innebærer at det må finnes formler $\beta;1,....,\beta;n$ slik at (3) $\beta;1,....,\beta;n \ \hat{e} \ \Delta$ og der vi har
(4) $\mid\!\!- \sim(\beta;1 \& ... \& \beta;n \& \sim\alpha)$.
Fra (1) følger tilsvarende at (5) $\sim(\alpha \hat{e} \Delta)$. Siden Δ er maksimalt konsistent følger da per definisjon at $\Delta U\{\alpha\}$ er inkonsistent. Dette innebærer at det finnes formler $\gamma;1,...,\gamma;m$ der vi har (6) $\gamma;1,...,\gamma;m \ \hat{e} \Delta$ og (7) $\mid\!\!- \sim(\gamma;1 \& .... \& \gamma;m \ \& \alpha)$. Fra (4) og (7) følger:
(8) $\mid\!\!- \beta;1 \& ... \& \beta;n \rightarrow \alpha$ & $\mid\!\!- \gamma;1 \& .... \& \gamma;m \rightarrow \sim\alpha$
Fra dette i sin tur følger: (9) $\mid\!\!- \sim(\beta;1 \& ... \& \beta;n \ \& \ \gamma;1 \& .... \& \gamma;m)$. Men i lys av (3) og (6) innebærer dette at Δ er inkonsistent. Men dette strider mot forutsetningen om at Δ er maksimalt konsistent. Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad *(iii)*: Anta for reduktio at absurdum (1) $\mid\!\!- \alpha \ \& \sim(\alpha \hat{e} \Delta)$. Fra den siste konjunkten følger ved hjelp av foregående punkt at $(\sim\alpha)\hat{e}\Delta$. Da har vi (2) $\{\sim\alpha\}$ Inkl Δ. Men siden $\mid\!\!-\alpha$ følger $\mid\!\!- \sim\sim\alpha$. Dette innebærer at $\{\sim\alpha\}$ er inkonsistent. Men i lys av (2) må da Δ være inkonsistent noe som strider mot at Δ er maksimalt konsistent. Det følger at (1) ikke holder. Dette viser punkt (iii) holder.

Ad (iv). Anta (1) $\alpha \hat{e} \Delta \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta$ og for reduktio ad absurdum at (2) $\sim(\beta \hat{e} \Delta)$. Fra (2) og punkt (ii) følger at $(\sim\beta)\hat{e}\Delta$. Fra dette og (1) følger at
(3) $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta, \sim\beta\}$ Inkl Δ. Nå har man ved ren setningslogikk: $\mid\!\!- \sim(\alpha \ \& \ \alpha \rightarrow \beta \ \& \sim\beta)$. Dette innebærer at formelmengden $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta, \sim\beta\}$ er inkonsistent. Men i lys av (3) må da Δ være inkonsistent. Men det er umulig siden Δ er maksimalt konsistent. Dette viser at (iv) holder.

Ad (v) Anta (1) $\mid\!\!-\alpha \rightarrow \beta$ og at (2) $\alpha \hat{e} \Delta$. Fra (1) og punkt (iii) følger $(\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta$. Fra dette, (2) og foregående punkt følger umiddelbart $\beta \hat{e} \Delta$. Dette viser punkt (v) holder.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Det bør bemerkes at Lindenbaums lemma, Lemma 4.1 og Lemma 4.2 holder uansett hvilket system det er man arbeider med så lenge systemet er en av de utvidelsene av $K\eta$- som vi har avgrenset i §2.

§5 Fullstendigheten til kalkylen Kη

I dette avsnittet skal vi gi et fullstendighetsbevis for kalkylen Kη. Det er imidlertid på dette punkt gunstig å gi bevis for den følgende sats siden den vil bli benyttet i argumentet for fullstendighet.

Lemma 5.1: Anta (i) Δ er en S-maksimalt konsistent formelmengde i L. Anta videre (ii) at ηêΔ. Anta at β er en formel i L der vi har (iii) CT(β)êΔ. Anta tilslutt (iv) at X er en formelmengde i L som er definert slik: X= {β} U {α: T(α)êΔ}. Da har man at X er en S-konsistent mengde.

Bevis: Anta forutsetningene (i) -(iv) holder og anta for reduktio ad absurdum at (1) X er en inkonsistent utsagnsmengde. Da må det finnes distinkte γ;1,...,γ;n (n>=1) der (2) γ;1,...,γ;nêX og (3) |- ~(γ;1&... & γ;n). Vi skiller nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): n=1. Da har vi fra (3) at (4) |-~γ;1. Fra dette har vi ved hjelp av R1: (5) |- η→ T(~γ;1). Fra (5), den andre forutsetningen i lemmaet, og punkt (v) i lemmaet om egenskaper til maksimale mengder at (6) T(~γ;1)êΔ. Vi må skille mellom to undertilfelle: Tilfelle (a.1). γ;1= β. Da har vi i lys av (6) at T(~β)êΔ. Nå har man |- T(~β) → ~CT(β). Det følger da ved hjelp av lemmaet om maksimale mengder at (~CT(β))êΔ. Fra dette følger, igjen ved hjelp av lemma om maksimale mengder, ~(CT(β)êΔ). Dette strider mot den tredje forutsetningen i satsen. Tilfelle (a.2): Vi har γ;1 <>β. Fra (4) følger umiddelbart (7) |- ~(γ;1 & β). Fra dette har vi så i sin tur ved hjelp av ren setningslogikk at |- γ;1→ ~β. Herav følger så ved å benytte regelen R2 |- η → (T(γ;1)→ T(~β)). Fra dettte, forutsetning (ii), (6) og punkt (v) i lemmaet om maksimale mengder har vi T(~β)êΔ. På samme måte som i foregående tilfelle innser man da at ~(CT(β)êΔ) som strider mot forutsetning (iii) i satsen.

Tilfelle (b). n>1. Vi må igjen se på to undertilfelle:

Tilfelle (b.1): βê{γ;1,...,γ;n}. I så tilfelle kan vi anta at β=γ;n. Da følger fra (3) at vi må ha: |- γ;1&...&γ;(n-1)→ ~β. Fra dette følger ved hjelp av R2 og A1:

(8) |- η → (T(γ;1)&....&T(γ;n-1) → T(~β)) . Fra (2), forutsetning (iv) og det forhold at γ;n=β følger at γ;1,...,γ;(n-1)ê{α: T(α)êΔ}. Herav har man (9) T(γ;1),...,T(γ;(n-1))êΔ. Fra (8) og (9) kan man ved hjelp av forutsetning (3) og punkt (v) i lemmaet om maksimale mengder slutte at T(~β)êΔ. På samme måte som tidligere innser man da at ~(CT(β)êΔ) som strider mot forutsetning (iii) i satsen.

Tilfelle (b.2). ~(βê{γ;1,...,γ;n}). Fra (3) følger da (10) |- ~(γ;1&... & γ;n& β). Fra dette har vi ved hjelp av setningslogikk: |- γ;1&... & γ;n→ ~β. Herav kan vi så slutte ved hjelp av R2 og A1 at (11) |- η → (T(γ;1)&....&T(γ;n) → T(~β)). Fra (2), forutsetning (iv) og det forhold at ~(βê{γ;1,...,γ;n}) følger γ;1,...,γ;(n-1)ê{α: T(α)êΔ}. Herav har man (12) T(γ;1),...,T(γ;(n-1))êΔ . Fra (11) og forutsetning (ii), ie at ηêΔ kan man ved hjelp av Lemmaet om maksimale mengder slutte: (T(γ;1)&....&T(γ;n) → T(~β))êΔ. Fra dette og (12) kan man så ved hjelp av det samme lemma slutte at T(~β)êΔ. Fra dette følger per definisjon av CT at (~CT(β))êΔ. Herav følger så ~(CT(β)êΔ). Som strider mot forutsetning (iii).

I alle tilfellene har vi utledet en motsigelse. Det følger at X ikke kan være inkonsistent. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Man ser at vi i dette beviset utelukkende har anvendt reglene R1 og R2 samt aksiomet A1. Aksiomet A2 har ikke blitt brukt. Man ser også at bruken av regelen R1 er vesentlig.

Definisjon 5.1: Vi bruker "Γ Sub Δ" som forkortelse for uttrykket "Formelmengden Γ er underordnet formelmengden Δ". Uttrykket er formelt sett definert slik:

Γ Sub $\Delta \leftrightarrow$ Max;k(Δ) & $\eta \hat{e} \Delta$ &
($E\beta$)(Ex)(CT(β) $\hat{e}\Delta$ & $x = \{\beta\} U \{\alpha: T(\alpha) \hat{e} \Delta\}$ & Max;k(Γ) & x Inkl Γ)

Man ser fra denne definisjonen at Γ er underordnet Δ hvis og bare hvis Γ og Δ er maksimalt konsistente utsagnsmengder som oppfyller de følgende krav: (i) Utsagnskonstanten η er et element i Δ. (ii) Det finnes en formel β i L der man har at CT(β) er med i Δ og hvor dessuten Γ inneholder formelmengden $\{\beta\} U \{\alpha: T(\alpha) \hat{e} \Delta\}$.

Definisjon 5.2: Med den Cresswell-kanoniske modell forstår vi modellen M=<W,R,q,f,V> der de enkelte komponentene er definert slik:

(i) W = $\{\Delta$: Max;k(Δ)$\}$
(ii) R = {:<Δ,Γ>: Γ Sub $\Delta\}$
(iii) q = { Δ: ($E\Gamma$)(Γ Sub Δ)$\}$
(iv) f = {<w, $\{\alpha: T(\alpha) \hat{e} w\}$> : W-q }
(v) V(p;i) = {w: w$\hat{e}$W & p;i $\hat{e}$w)
(vi) V(η) = q.

Man ser ganske lett at den Cresswell-kanoniske modellen faktisk er en modell for L. Men dette må man gi et bevis for:

Teorem 5.1: Er M=<W,R,q,f,V> den Cresswell-kanoniske modellen så er M en Kη-modell for L

Bevis: Det er nok å vise at M oppfyller de krav som vi stiller til en modell.

(i) Det skulle være klart at det finnes maksimalt konsistente mengder. Man har som man lett ser at {p;1} er en konsistent formelmengde. Etter Lindenbaums lemma kan den da utvides til en maksimalt konsistent mengde. Dette innebærer i lys av definisjonen av W at denne mengden er ikke-tom.

(ii) Er <Δ,Γ>$\hat{e}$R ser man at Γ Sub Δ. Fra definisjonen av relasjonen Sub ser man da at Δ,Γ er maksimalt konsistente mengder. Dette innebærer at vi har R inkl WxW. Vi må imidlertid vise at (Aw)(w$\hat{e}$q $\rightarrow$ (Ey)(y$\hat{e}$W & wRy)). Anta derfor w$\hat{e}$q. Fra definisjonen ovenfor ser man da at ($E\Gamma$)(Γ Sub w) Dette innebærer at vi har Γ Sub w for noe Γ. Da må åpenbart Γ, Δ være maksimalt konsistente mengder. I kraft av definisjonen av R har man da, om man setter w'=Γ, at wRw' og derfor: (Ew')(w'$\hat{e}$W & wRw').

(iii) Fra definisjonen av q har vi, dersom w$\hat{e}$q, at ($E\Gamma$)(Γ Sub w). Fra dette følger ΓSubΔ for noe Γ. Men fra definisjonen av Sub følger det da at w er en maksimalt konsistent mengde og derfor med i W. Vi har derfor q Inkl W. Men det er selvfølgelig ikke noe som tilsier at q skal være ikke-tom.

(iv) Det fremgår fra definisjonen av f at f = {<w, $\{\alpha: T(\alpha) \hat{e} w\}$> : W-q } Man inner lett at f er en funksjon: Anta <x,y>$\hat{e}$f & <x,z>$\hat{e}$f. Da følger at det finnes w1 og w2 der vi har

(1) <x,y> = {<w1, $\{\alpha: T(\alpha) \hat{e} w1\}$> & w1$\hat{e}$W-q og
(2) <x,z> = {<w2, $\{\alpha: T(\alpha) \hat{e} w2\}$> & w2$\hat{e}$W-q

Herav følger (3) w1=x=w2 og (4) y= $\{\alpha: T(\alpha) \hat{e} w1\}$ & z= $\{\alpha: T(\alpha) \hat{e} w2\}$.
Fra (3) og (4) følger at y=z. Dette viser at f er en funksjon. Er w$\hat{e}$W-q har man fra definisjonen av f at f(w) = $\{\alpha: T(\alpha) \hat{e} w\}$ Dette viser at f(w) er en mengde med formler i L

(iv) Fra definisjonen ovenfor skulle det være klart at V(p;i) er en delmengde av W og at V tilordner setningskonstanten η mengden q. Dette avslutter beviset. **QED.**

Vi skal senere definere en en annen type kanonisk modell for L enn den som er fiksert ovenfor. Konstruksjonen ovenfor er inspirert av Hughes & Cresswell, spesielt når det gjelder definisjonen av R. Ellers inneholder den endel elementer som vi utelukkende er ansvarlige for og som har med systemet Kη å gjøre. Dette systemet studeres ikke av Hughes og Cresswell som i sin bok utelukkende studerer Kripke-modeller i forbindelse med de systemene de tar opp til behandling. Den typen modeller vi her benytter oss av er i en viss forstand ikke rene Kripke-modeller på grunn av nærværet av komponentene q og f i en modell M=<W,R,q,f,V>.

Lemma 5.2: La M=<W,R,q,f,V> være den Cresswell-kanoniske modellen for L. La w være et vilkårlig element i W. Da gjelder:

ηêw ↔ wêq

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og at (1) ηêw. Da har vi (2) Max;k(w). Videre har vi i kraft av A2 at |- η → CT(βv~β). Fra dette følger ved hjelp av lemmaet om maksimale mengder at (3) CT(βv~β)êw. Sett (4) x= {βv~β}U {α: T(α)êw}. Da har vi ved hjelp av hjelpesetningen som vi beviste tidligere at x er en konsistent mengde. Det finnes da en mengde w;1 slik at (5) Max;k(w;1) & x Inkl w;1 Fra (1)-(5) følger det ved hjelp av definisjonen av Sub at (6) w;1 Sub w. Fra dette følger det videre at (Ey)(ySubw) og derfor fra definisjonen av q i en Cresswell-modell at wêq. Vi har nå vist at ηêw → wêq. Anta på den annen side at (7) wêq. Da følger (Ey)(y Sub w). Det finnes altså y slik at (8) y Sub w. Fra definisjonen av Sub ser man at dette impliserer at ηêw. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Den følgende sats er det viktigste elementet i vårt bevis for komplettheten til Kη.

Hovedlemma 5.3 La M=<W,R,q,f,V> være den Cresswell-kanoniske modellen for L. La w være et vilkårlig element i W og α en vilkårlig formel i L. Da gjelder:

(M,w) ⊨ α ↔ α ê w

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av formler i L.

(i) Anta α = p;i for noe naturlig tall i. Da har man:

(M,w) ⊨ α ↔ wêV(p;i) = wê{w': w'êW & p;i êw')↔ p;iêw

Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.

(ii) Anta α = η. Da har man ved hjelp av definisjonen av ⊨ :

(M,w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨ η ↔ wê V(η) ↔ wêq. Den siste bikondisjonalen følger fra definisjonen av V. Men vi har wêq ↔ ηêw ifølge lemmaet rett ovenfor. Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

(iii) Anta α = ~β for noen formel β. Da har man:

(1) (M,w) ⊨ ~β ↔ ~((M,w) ⊨ β). Etter induksjonshypotesen har vi (2) (M,w) ⊨ β ↔ βêw. Fra dette og (1) følger: (M,w) ⊨ ~β ↔ ~(βêw) ↔ (~β)êw. Den siste bikondisjonalen holder i kraft av lemmaet om maksimale mengder.

(iv) α= β&γ. Da har vi ved hjelp av definisjonen av ⊨ :

(1) (M,w) ⊨ (β&γ) ↔ (M,w) ⊨ β & (M,w) ⊨ γ Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi så: (2) (M,w) ⊨ β & (M,w) ⊨ γ ↔ (βêw & γêw). Nå har vi (3) |- β→ (γ → (β&γ) samt (4) |- β&γ →β og (5) |- β&γ → γ. Fra (3) - (5) følger ved hjelp av punkt (v) i lemmaet om maksimale mengder at (6) (βêw & γêw) ↔ (β&γ)êw. Fra dette, (1) og (2) følger så det vi ønsker, nemlig: (M,w) ⊨ (β&γ) ↔ (β&γ)êw.

(v) Vi sondrer mellom to tilfelle ettersom wêq eller ikke:

Tilfelle (i) (1) wêq. Vi skal første vise (2) (M,w) ⊨ T(α) → T(α)êw. Anta derfor (3) (M,w) ⊨ T(α). Fra dette, (1) og definisjonen av ⊨ følger:

(4) (Ay)(yêW & wRy → (M,y) ⊨α). I lys av induksjonshypotesen impliserer dette: (5) (Ay)(yêW & wRy → αêy). Anta nå for reduktio ad absurdum at (6) ~(T(α)êw). Ved hjelp av lemmaet for maksimale mengder har man da (7) (~T(α))êw. Fra dette følger siden |- ~T(α) → CT(~α) at (8) CT(~α)êw. Nå har man fra (1) at det finnes w' slik at (9) w' Sub w. Studerer man da definisjonen av Sub ser man (7) impliserer: (10) ηêw. Sett nå (11) x= {~α}U{β: T(β)êw}. Fra en hjelpesetning vi tidligere beviste følger da at det finnes en w;0 slik at (12) Max;k(w;0) & x Inkl w;0. Siden w er en maksimalt konsistent mengde følger fra (8), (10), (11), (12) og definisjon av Sub at w;0 Sub w. Herav følger så at (13) wRw;0. Fra (11) og (12) har man (~α)ê w;0 og derfor (14) ~(αêw;0) i lys av lemmaet om maksimale mengder. Men (13) og (14) motsier (5). Det følger at (4) ikke holder og derfor at T(α)êw. Dette viser at (2) holder.

Vi må også vise (15) T(α)êw → (M,w) ⊨ T(α). Anta derfor (16) T(α)êw og anta for reduktio ad absurdum (17) ~((M,w) ⊨ T(α)). Fra dette siste og (1) følger ved hjelp av definisjonen av ⊨ at det finnes en w;1 slik at (18) wRw;1 & ~((M,w;1) ⊨ α). Ved hjelp av induksjonshypotesen kan man fra dette slutte (19) ~(αêw;1). Fra definisjonen av R og definisjonen av Sub følger fra den første konjunkten i (18) at det finnes x og β slik at:

(19) CT(β) êw & x= {β}U{α: T(α)êw}& x Inkl w;1 Fra de to siste konjunktene her følger i lys av (16): (20) αêw;1 som åpenbart strider mot (19). Dette viser at (15) holder. Fra (2) og (15) følger det at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): wê(W-q) Da har vi ikraft av definisjonen av ⊨ og definisjonen av M at:

(M,w) ⊨ T(α) ↔ αêf(w) ↔ αê {β: T(β)êw} ↔ αêw.

I begge tilfelle holder satsen. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis. **QED.**

Lemma 5.4: La M=<W,R,q,f,V> være den Cresswell-kanoniske modellen for L. La w være et vilkårlig element i W. Da gjelder:

ηêw ↔ (Ew')(w'êW &wRw')

Bevis: I lys av et tidligere bevist teorem har vi (1) ηêw ↔ wêq. På den annen side følger det fra definisjonen av Cresswell-kanonisk modell at (2) wêq ↔ (Ey)(y Sub w). Men vi har (3) (Ey)(y Sub w) ↔ (Ey)(yêW & wRy) på grunnlag av definisjonen av R. Fra (1) - (3) følger satsen. **QED.**

Teorem 5.2. (Konsistensteorem 1) Anta Δ er en Kη-konsistent utsagnsmengde i L. Da finnes det en Kη- modell M=<W,R,q,f,V> for L og et element wêW slik at:

(Aα)(α êΔ → (M,w) ⊨ α)

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og anta for vilkårlig α at (1) αêΔ. Siden Δ er en konsistent utsagnsmengde i L har vi etter lindenbaums lemma at det finnes en maksimalt konsistent mengde Γ som er slik at (2) Δ Inkl Γ. Sett (3) w;0=Γ. La M=<W,R,q,f,V> være den Cresswell- kanoniske modellen for L. Siden w;0 er en maksimalt konsistent mengde har vi (4) w;0 êW. Nå har vi ved hjelp av hovedlemmaet at:

(5) (Aγ)(γêFm(L) →. (M,w;0) ⊨ γ ↔ γêw;0)

Fra (1) og (2) følger det at αêΔ Inkl Γ =w;0. Fra dette og (5) følger så det vi ønsker nemlig: (M,w;0) ⊨ α. Siden α vra vilkårlig har vi: (Aα)(α êΔ → (M,w) ⊨ α). **QED.**

Teorem 5.3 (Fullstendighetsteorem 1)

Anta α er en vilkårlig formel i L. Da har man: Kη |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver Kη-modell for L

Bevis: Vi har allerede bevist gyldighetsdelen: Kη |- α → ╞ α. La oss derfor ta for oss fullstendighetsdelen. Anta (1) ~(|- α). Da er {~α} en konsistent utsagnsmengde. Da har vi ifølge konsistensteoremet ovenfor at det finnes en Kη- modell M=<W,R,q,f,V> for L, og en verden wêW, der vi har:

(Aβ)(βê{~α} → (M,w) ╞ β). Dette impliserer at ~((M,w) ╞ α). Men da holder ikke ╞ α, siden dette impliserer at α skal være sann i enhver verden i enhver modell for L. **QED.**

Vi er interessert i å formulere fullstendighetsteoremet på en noe annen måte. For dette formål definerer vi først hva som menes med at en formel er bevisbar ut fra formlene i mengden Δ. Dernest definerer vi hva som her vi forstås med at formelen α er en logisk konsekvens av formlene i mengden Δ.

Definisjon 5.2: La Δ være en formelmengde i Δ og α en vilkårlig formel. Da sier vi at Δ,S |- α , α er S-utledbar fra formlene i Δ, hvis og bare hvis ΔU{~α} er en S-inkonsistent formelmengde.

Definisjon 5.3: Anta α er en formel i L, Δ en formelmengde i L og M=<W,R,q,f,V> er en modell for L. Da setter vi:

(i) M ╞ α ↔ (Aw)(wêW → (M,w) ╞ α

(ii) M ╞ Δ ↔ (Aα)(αêΔ → M ╞α)

Definisjon 5.4: Anta Δ er en formelmengde i L og α en formel i L og anta at K er en klasse av modeller for L. Da sier vi at α er en logisk konsekvens av formlene i Δ med hensyn på klassen K av modeller hvis og bare hvis vi har for enhver modell M=<W,R,q,f,V> som er med i K, og ethvert element wêW, at dersom (Aβ)(βêΔ → (M,w) ╞ β) så holder (M,w) ╞ α.

Teorem 5.4 (Fullstendighetsteorem 2) Anta α er en formel i L og Δ en formelmengde i L. Da har vi: Δ,Kη |- α hvis og bare hvis α er en logisk konsekvens av formlene i Δ med hensyn på klassen av Kη-modeller.

Bevis: (a) Vi ta først for oss kondisjonalen mot høyre. Anta Δ|-α. Fra definisjonen av bevisbarhet følger da at ΔU{α} er en inkonsistent utsagnsmengde. Dette innebærer at det finnes (1) β;1,...,β;n êΔ slik at (2) |- (β;1&...&β;n → α. Anta nå M=<W,R,q,f,V> er en vilkårlig modell for L og at wêW er et vilkårlig element i W. For å vise at α er en logisk konsekvens av formlene i Δ anta (3) (Aβ)(βêΔ → (M,w) ╞ β). Fra dette og (1) følger at (4) (M,w) ╞ β;1&...&β;n. Men fra (2) og gyldighetsteoremet følger:
(5) (M,w) ╞ β;1&...&β;n→ α. Fra (4) og (5) følger det vi ønsker, nemlig (M,w) ╞ α.

(b) Anta ~(Δ |- α). Da har vi per definisjon at ΔU{~α} er en konsistent utsagnsmengde. Ifølge konsistensteoremet finnes det da en modell M=<W,R,q,f,V> for L og en verden wêW slik at (Aβ)(βê ΔU{~α} → (M,w) ╞ β). Fra dette følger:

(6) (Aβ)(βê Δ → (M,w) ╞ β) og

(7) (M,w) ╞ ~α

Men da har vi i lys av definisjonen av logisk konsekvens at α ikke er noen logisk konsekvens av formlene i Δ. **QED.**

§6 Et alternativt bevis for fullstendigheten til Kη

Definisjon 6.1: Med den S-kanoniske modellen for L forstår vi modellen M=<W,R,q,f,V> der de enkelte komponentene er definert slik:

(i) W = {Δ: S-Max;k(Δ)}
(ii) R = {<Δ,Γ>: S-Max;k(Δ) & S-Max;k(Γ) & (Aα)(T(α)êΔ → αêΓ)
(iii) q= {Δ: S-Max;k(Δ) & ηêΔ)
(iv) f = {<w, {α: T(α)êw}> : W-q }
(v) V(p;i) = {w: wêW & p;i êw)
(vi) V(η) = q.

Man bør verifisere at den kanoniske modellen oppfyller de kravene vi stiller til en modell:

Teorem 6.1: Anta M=<W,R,q,f,V> er den S-kanoniske modellen for L. Da har vi:
(i) M er oppfyller alle de kravene som stilles til en modell for L

Bevis: Det er åpenbart at {p;1→p;1} er en S-konsistent formelmengde. Den kan derfor etter Lindenbaums lemma utvides til en maksimalt konsistent sådan. Videre skulle det være klart fra definisjonen at de andre komponentene R, f,q og V er definert slik at de oppfyller kravene i Definisjon 3.1.

Teorem 6.2: Anta M=<W,R,q,f,V> er den Kη-kanoniske modellen for L. Da har vi:
(i) (Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy))

Bevis: Det eneste man må vise er (i). Anta forutsetningene i satsen holder og at wêq. Fra definisjonen av q har man da (1) ηêw. og (2) Max;k(w). Videre har vi i kraft av A2 at |- η → CT(βv~β). Fra dette følger ved hjelp av lemmaet om maksimale mengder at (3) CT(βv~β)êw. Sett (4) x= {βv~β}U {α: T(α)êw}. Da har vi ved hjelp av Lemma 5.1 at x er en konsistent mengde. Det finnes da en mengde w;1 slik at (5) Max;k(w;1) & x Inkl w;1 Men fra (4) og (5) følger at (6) (Aα)(T(α)êw → αêw;1). Fra definisjon av R følger da siden w og w1 er maksimalt konsistente mengder at (7) w;1êW & wRw;1. Vi har derfor (Ew'(w'êW & wRw'). **QED.**

Hovedlemma 6.2 La M=<W,R,q,f,V> være den S- kanoniske modellen for L. La w være et vilkårlig element i W og α en vilkårlig formel i L. Da gjelder:
(M,w) ⊨ α ↔ α ê w

Denne satsen må bevises på nytt fordi begrepet kanonisk modell ikke er identisk med begrepet Cresswell-kanonisk modell.

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av formler.
(i) Anta α = p;i for noe naturlig tall i. Da har man:
(M,w) ⊨ α ↔ wêV(p;i) = wê{w': w'êW & p;i êw')↔ p;iêw
Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.
(ii) Anta α = η. Da har man ved hjelp av definisjonen av ⊨ :
(M,w) ⊨ α ↔ (M,w) ⊨ η ↔ wê V(η) ↔ wêq ↔ ηêw. Den siste bikondisjonalen holder i kraft av definisjonen av q. Påstanden holder derfor i dette tilfellet.
(iii) Anta α = ~β for noen formel β. Da har man:
(1) (M,w) ⊨ ~β ↔ ~((M,w) ⊨ β). Etter induksjonshypotesen har vi
(2) (M,w) ⊨ β ↔ βêw. Fra dette og (1) følger: (M,w) ⊨ ~β ↔ ~(βêw) ↔ (~β)êw.
Den siste bikondisjonalen holder i kraft av lemmaet om maksimale mengder.
(iv) α= β&γ. Da har vi ved hjelp av definisjonen av ⊨ :

(1) $(M,w) \models (\beta\&\gamma) \leftrightarrow (M,w) \models \beta$ & $(M,w) \models \gamma$ Ved hjelp av induksjonshypotesen har vi så: (2) $(M,w) \models \beta$ & $(M,w) \models \gamma \leftrightarrow (\beta \hat{e} w$ & $\gamma \hat{e} w)$. Nå har vi (3) $\vdash \beta \rightarrow (\gamma \rightarrow (\beta\&\gamma)$ samt (4) $\vdash \beta\&\gamma \rightarrow \beta$ og (5) $\vdash \beta\&\gamma \rightarrow \gamma$. Fra (3) - (5) følger ved hjelp av punkt (v) i lemmaet om maksimale mengder at (6) $(\beta \hat{e} w$ & $\gamma \hat{e} w) \leftrightarrow (\beta\&\gamma) \hat{e} w$. Fra dette, (1) og (2) følger så det vi ønsker, nemlig: $(M,w) \models (\beta\&\gamma) \leftrightarrow (\beta\&\gamma) \hat{e} w$.

(v) α er en formel av typen $T(\beta)$. Vi sondrer mellom to tilfelle ettersom $w \hat{e} q$ eller ikke:

Tilfelle (i) (1) $w \hat{e} q$. Vi skal første vise (2) $(M,w) \models T(\alpha) \rightarrow T(\alpha) \hat{e} w$. Anta derfor (3) $(M,w) \models T(\alpha)$. Fra dette, (1) og definisjonen av $\models$ følger:

(4) $(Ay)(y \hat{e} W$ & $wRy \rightarrow (M,y) \models \alpha)$. I lys av induksjonshypotesen impliserer dette: (5) $(Ay)(y \hat{e} W$ & $wRy \rightarrow \alpha \hat{e} y)$. Anta nå for reduktio ad absurdum at (6) $\sim(T(\alpha) \hat{e} w)$. Ved hjelp av lemmaet for maksimale mengder har man da (7) $(\sim T(\alpha)) \hat{e} w$. Fra dette følger, siden $\vdash \sim T(\alpha) \rightarrow CT(\sim\alpha)$, at (8) $CT(\sim\alpha) \hat{e} w$. Nå har man fra (1) og definisjonen av q at: (9) $\eta \hat{e} w$. Sett nå (10) $x = \{\sim\alpha\} U \{\beta: T(\beta) \hat{e} w\}$. Fra Lemma 5.1 følger da at det finnes en w;0 slik at (11) Max;k(w;0) & x Inkl w;0. Fra (10) og (11) følger at $(A\beta)(T(\beta) \hat{e} w \rightarrow \beta \hat{e} w;0)$ og derfor i lys av definisjonen av R at (12) wRw;0 siden w og w;0 er maksimalt konsistente mengder. Fra (10) og (11) har man $(\sim\alpha) \hat{e}$ w;0 og derfor (13) $\sim(\alpha \hat{e} w;0)$ i lys av lemmaet om maksimale mengder. Men (12) og (13) motsier (5). Det følger at (4) ikke holder og derfor at $T(\alpha) \hat{e} w$. Dette viser at (2) holder.

Vi må også vise (14) $T(\alpha) \hat{e} w \rightarrow (M,w) \models T(\alpha)$. Anta derfor (15) $T(\alpha) \hat{e} w$ og anta for reduktio ad absurdum (16) $\sim((M,w) \models T(\alpha))$. Fra dette siste og (1) følger ved hjelp av definisjonen av $\models$ at det finnes en w;1 slik at (17) wRw;1 & $\sim((M,w;1) \models \alpha)$. Ved hjelp av induksjonshypotesen kan man fra dette slutte (18) $\sim(\alpha \hat{e} w;1)$. Fra definisjonen av R kan man slutte at $(A\beta)(T(\beta) \hat{e} w \rightarrow \beta \hat{e} w;1)$ Men fra dette og (18) følger: $\sim(T(\alpha) \hat{e} w)$ som åpenbart strider mot (15). Fra (2) og (14) følger det at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): $w \hat{e} (W-q)$ Da har vi ikraft av definisjonen av $\models$ og definisjonen av M at:

$(M,w) \models T(\alpha) \leftrightarrow \alpha \hat{e} f(w) \leftrightarrow \alpha \hat{e} \{\beta: T(\beta) \hat{e} w\} \leftrightarrow \alpha \hat{e} w$.

I begge tilfelle holder satsen. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Man ser at vi i beviset for Lemma 5.1 og beviset for satsen ovenfor overhodet ikke har brukt aksiomet A2. Vi har derfor at det følgende teorem holder:

Teorem 6.3. (Konsistensteorem 1) Anta Δ er en Kη- konsistent utsagnsmengde i L. Da finnes det en modell $M=<W,R,q,f,V>$ for L og et element $w \hat{e} W$ slik at:

$(A\alpha)(\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (M,w) \models \alpha)$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og anta for vilkårlig α at (1) $\alpha \hat{e} \Delta$. Siden Δ er en konsistent utsagnsmengde i L har vi etter lindenbaums lemma at det finnes en (Kη-)-maksimalt konsistent mengde Γ som er slik at (2) Δ Inkl Γ. Sett (3) $w;0=\Gamma$. La $M=<W,R,q,f,V>$ være den (Kη-)-kanoniske modellen for L. Siden w;0 er en maksimalt konsistent mengde har vi (4) $w;0 \hat{e} W$. Nå har vi ved hjelp av hovedlemmaet at:

(5) $(A\gamma)(\gamma \hat{e} Fm(L) \rightarrow . (M,w;0) \models \gamma \leftrightarrow \gamma \hat{e} w;0)$

Fra (1) og (2) følger det at $\alpha \hat{e} \Delta$ Inkl $\Gamma = w;0$. Fra dette og (5) følger så det vi ønsker nemlig: $(M,w;0) \models \alpha$. Siden α vra vilkårlig har vi: $(A\alpha)(\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (M,w) \models \alpha)$. **QED.**

Vi har også:

Teorem 6.4 (Fullstendighetsteorem 1)

Anta α er en vilkårlig formel i L. Da har man: (Kη-) $\vdash \alpha$ hvis og bare hvis α er gyldig i enhver (Kη-)-modell for L

Bevis: Vi har allerede bevist gyldighetsdelen: (Kη-) |- α → ⊨ α. La oss derfor ta for oss fullstendighetsdelen. Anta (1) ~(Kη- |- α). Da er {~α} en (Kη-)- konsistent utsagnsmengde. Da har vi ifølge konsistensteoremet ovenfor at Det finnes en (Kη-)- modell M=<W,R,q,f,V> for L og en verden wêW der vi har:

(Aβ)(βê{~α} → (M,w) ⊨ β). Dette impliserer at ~((M,w) ⊨ α). Men da holder ikke ⊨ α, siden dette impliserer at α skal være sann i enhver verden i enhver modell for L. **QED.**

§7 Om en del utvidelser av kalkylene Kη- og Kη

I dette avsnittet skal vi studere en del utvidelser kalkylene Kη- og Kη. Når det gjelder utvidelser av disse systemene som betraktes her skal vi utlukkende se på dem som fremkommer ved å legge til et eller flere av de syv skjemaene som vi nevnte i §2, dette var skjemaene B1, B4-B9. Er S et av disse skjemaene betegner vi kalkylen man får når dette skjemaet legges til Kη- med Kη-[S]. Tilsvarende betegnes kalkylen man får når man legger skjemaet S til Kη med Kη[S]. I det følgende skal vi begrense oss til hovedsakelig å se på utvidelser av Kη- og Kη der vi tar med B1 og dessuten tar med en vilkårlig delmengde av aksiomene B4 - B9. X skal i det følgende stå for en vilkårlig av disse aksiomskjemamengdene. Vi har med andre ord at X= {B1}UΔ der ΔêPt({B4,B5,B6,B7,B9}). Som man ser kutter vi vekk skjemaet B8 fordi det er ekvivalent med konjunksjonen av B6 og B7 i nærvær av de andre aksiomskjemaene og slutningsreglene i Kη-.

Utvides kalkylen Kη med aksiomskjemaene i X betegnes i det følgende resultatet Kη +X. Tilsvarende betegner vi resultatet av å utvide Kη- med aksiomskjemaene i X med Kη- +X.

Teorem 7.1 Anta M= <W,R,q,f,V> er en modell for L som oppfyller de følgende krav

(i) (Aw)(Aw')(w,w'êW →. wêq & wRw' → w'êq)

(ii) Er w,w', w" elementer i W gjelder:

wêq & wRw' & w' R w" → wRw"

Da har man: M ⊨ (η → . T(α)→ T(T(α)))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Anta (1) wêW for vilkårlig w. Anta videre: (2) (M,w) ⊨ η og (3) (M,w) ⊨ T(α). Det vil være tilstrekkelig å vise:
(+) (M,w) ⊨ T(T(α)). Fra (2) følger ved hjelp av definisjonen av ⊨ at : (4) wêq. Fra dette og (3) har vi ved hjelp av definisjonen av ⊨ at (5) (Aw')(wRw' → (M,w') ⊨ α). For å vise (+) er det tilstrekkelig å bevise: (6) (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨ T(α)). Anta derfor for vilkårlig w' at (7) w'êW& wRw'. Da har vi fra (4) og forutsetning (i) at (8) w'êq. Nå har man ved hjelp av definisjonen av ⊨ :

(9) (M,w') ⊨ T(α) ↔ (w'êq & (Aw")(w"êW & w'Rw" → (M,w") ⊨α))
v (w'ê(W-q) & αê f(w'))

Fra dette og (8) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(10) (M,w') ⊨ T(α) ↔ (Aw")(w"êW & w'Rw" → (M,w") ⊨α)

Det vil altså være nok å vise (++) (Aw")(w"êW & w'Rw" → (M,w") ⊨α) for å vise (+). Anta derfor for vilkårlig w" at (11) w"êW & w'Rw". Fra dette, (4), (7) og den andre forutsetning (ii) følger: wRw". Dette og (5) impliserer (M,w") ⊨ α. Siden w" var vilkårlig har vi derfor vist at (++) holder. Dette avslutter beviset. **QED.**

Kommentar: Man ser at skjemaet η→ T(α)→T(T(α)) er gyldig i enhver modell som oppfyller de to kravene (i) og (ii) som er nevnt i satsen. Fra Teorem 7.3 nedenfor ser man også at

aksiomet $\eta \rightarrow T(\eta)$ er gyldig i alle disse modellene. Det følger at man fra resultatet ovenfor kan konkludere med at alle teoremer i systemet $K\eta$-[B1, B4] er gyldige i alle modeller i klassen som oppfyller kravene (i) og (ii).

I forbindelse med dette beviset bemerker vi at satsen fremdeles holder om vi fjerner forbeholdet om $w \hat{e} q$ i forutsetning (ii). Man kan altså bevise en litt sterkere sats.

Teorem 7.2 Anta M= <W,R,q,f,V> er en modell for L som oppfyller de følgende krav
(i) $(Aw)(Aw')(w,w' \hat{e} W \rightarrow . w \hat{e} q \ \& \ wRw' \rightarrow w' \hat{e} q)$
(ii) Er x,y elementer i W gjelder:
$x \hat{e} q \ \& \ xRy \rightarrow (Ez)(z \hat{e} W \ \& \ xRz \ \& \ zRy)$
Da har man: $M \models (\eta \rightarrow . T(T(\alpha)) \rightarrow T(\alpha))$

Bevis: Anta w er et vilkårlig element i W og at (1) $(M,w) \models \eta$ og (2) $(M,w) \models T(T(\alpha))$. Fra (1) følger ved hjelp av definisjonen av $\models$ at (3) $w \hat{e} q$. Fra dette, (2) og definisjonen av $\models$ følger : (4) $(Aw')(w' \hat{e} W \ \& \ wRw' \rightarrow (M,w') \models T(\alpha))$.

Anta nå for vilkårlig w;0 at (5) $w;0 \hat{e} W \ \& \ wRw;0$. Fra dette, forutsetning (ii) og (3) kan man da slutte at det finnes w;1 der man har:

(6) $w;1 \hat{e} W \ \& \ wRw;1 \ \& \ w;1R \ w;0$.

Fra dette, (3) og forutsetning (i) har man: (7) $w;1 \hat{e} q$. Ytterligere har man fra (4) og (6) det følgende: (8) $(M,w;1) \models T(\alpha)$. I lys av (7) og definisjonen av $\models$ følger herav: (9) $(Aw'')(w'' \hat{e} W \ \& \ w;1Rw'' \rightarrow (M,w'') \models \alpha)$. Fra dette og (6) følger så $(M,w;0) \models \alpha$. Men w;0 var et helt vilkårlig element. Vi har derfor vist: $(Aw')(w' \hat{e} W \ \& \ wRw' \rightarrow (M,w') \models \alpha)$. Siden $w \hat{e} q$ etter (3) kan vi herav i lys av definisjonen av $\models$ konkludere med at: $(M,w) \models T(\alpha)$. Dette viser at satsen holder. **QED.**

En lignende kommentar som den til forrige teorem kan gjøres her. Betegner man klassen av alle de modeller som oppfyller de kravene (i) og (ii) i satsen rett ovenfor med C har man at alle teoremene i kalkylen $K\eta$-[B1,B5] er gyldige i enhver modell som er med i C.

Teorem 7.3 Anta M= <W,R,q,f,V> er en modell for L som oppfyller de følgende krav
(i) $(Aw)(Aw')(w,w' \hat{e} W \rightarrow . w \hat{e} q \ \& \ wRw' \rightarrow w' \hat{e} q)$
Da har man: $M \models (\eta \rightarrow T(\eta))$

Bevis: Anta w er et vilkårlig element i W og at $(M,w) \models \eta$. Da har vi ved hjelp av definisjonen av $\models$ at (1) $w \hat{e} q$. Anta nå for vilkårlig w' at (2) $w' \hat{e} W \ \& \ wRw'$. Fra dette, (1) og forutsetning (i) følger $w' \hat{e} q$, som i lys av definisjonen av $\models$ impliserer $(M,w') \models \eta$. Siden w' var vilkårlig har vi derfor bevist:

$(Aw')(w' \hat{e} W \ \& \ wRw' \rightarrow (M,w') \models \eta)$ Siden $w \hat{e} q$ ifølge (1) kan man da slutte $(M,w) \models T(\eta)$. Dette viser at satsen holder. **QED.**

Teorem 7.4 Anta M= <W,R,q,f,V> er en modell for L som oppfyller de følgende krav
(i) $(Aw)(Aw')(w,w' \hat{e} W \rightarrow . w \hat{e} q \ \& \ wRw' \rightarrow w' \hat{e} q)$
(ii) Er x,y vilkårlige elementer i W gjelder:
$x \hat{e} q \ \& \ xRy \rightarrow yRy$
Da har man: $M \models (\eta \rightarrow . T(T(\alpha) \rightarrow \alpha))$

Bevis: Anta $w \hat{e} W$ for vilkårlig w og at (1) $(M,w) \models \eta$. Vi må bevise:

(+) (M,w) ⊨ T(T(α)→α). Fra (1) kan man slutte: (2) wêq. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise: (3) (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨ (T(α)→α))

Anta derfor for vilkårlig w' at (4) w'êW & wRw'. Fra dette, (2) og forutsetning (i) følger (5) w'êq. Anta nå at (6) (M,w') ⊨T(α). I lys av (5) og valuasjonsregelen for T(α) kan man da slutte:

(7) (Aw")(w"êW & w'Rw" → (M,w") ⊨ α)

Fra forutsetning (ii) og (4) følger (8) w'Rw'. Fra dette, første konjunkt i (4) og (7) følger (M,w') ⊨α. Vi har nå vist:

(M,w') ⊨T(α) → (M,w') ⊨α og derfor: (M,w') ⊨(T(α)→ α). Men w' var et vilkårlig element som oppfylte betingelsen (4). Det følger at (3) holder. **QED.**

Igjen kan man bemerke at om C betegner klassen av alle de modeller som oppfyller kravene (i) og (ii) i dette teoremet kan man ved hjelp av denne satsen og hva vi tidligere har bevist konkludere med at alle teoremene i Kη- [B1,B6] er gyldige i enhver modell i C.

Teorem 7.5 Anta M= <W,R,q,f,V> er en modell for L som oppfyller de følgende krav
(i) (Aw)(Aw')(w,w'êW →. wêq & wRw' → w'êq)
(ii) Er x,y elementer i W gjelder:
xêq & xRy → (Az)(zêW & yRz → z=y)
Da har man: M ⊨ (η → . T(α→T(α)))

Bevis: Anta for vilkårlig wêW at (1) (M,w) ⊨ η. Det følger da at (2) wêq. Vi må vise at (M,w) ⊨ (η → . T(α→T(α))) Siden (2) holder er det tilstrekkelig, i lys av valuasjonsregelen for T(α), å vise at (3) (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨ (α→T(α))).

Anta derfor for vilkårlig w' at (4) w'êW & wRw' & (M,w') ⊨ α. (2) og den første forutsetningen i satsen følger at (5) w'êq. Fra dette følger så ved hjelp av valuasjonsregelen for T(α) at (6) (M,w') ⊨ T(α) ↔ (Ay)(yêW & w'Ry → (M,y) ⊨α). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise: (7) (Ay)(yêW & w'Ry → (M,y) ⊨α). Anta derfor for vilkårlig y at yêW & w'Ry. I lys av (4) og forutsetning (ii) har man da w'=y. Men dette og (4) impliserer (M,y) ⊨ α. Dette viser at (7) holder. Siden w' var vilkårlig element der (4) holdt har vi vist:

(Aw')(w'êW & wRw' & (M,w') ⊨ α → (M,w') ⊨ T(α)). Men dette impliserer åpenbart (3) i lys av valuasjonsregelen for →. Dette viser at satsen holder. **QED.**

Igjen kan man bemerke at om C betegner klassen av alle de modeller som oppfyller kravene (i) og (ii) i dette teoremet kan man ved hjelp av denne satsen og hva vi tidligere har bevist konkludere med at alle teoremene i Kη- [B1,B7] er gyldige i enhver modell i C.

Teorem7.6 Anta M= <W,R,q,f,V> er en modell for L som oppfyller de følgende krav
(i) Er x,y elementer i W gjelder:
xêq & xRy → (Az)(xRz → y=z)
Da har man: M ⊨ (η → . T(α) v T(~α))

Bevis: Anta (M,w) ⊨ η for vilkårlig element wêW. Da følger (1) wêq. Det vil være tilstrekkelig å bevise: (+) (M,w) ⊨ T(α) v (M,w) ⊨ T(~α). Anta ~((M,w) ⊨ T(α)). Siden wêq innebærer dette i lys av valuasjonsregelen for T(α) at det finnes w;1 der vi har

(2) w;1êW & wRw;1 & ~((M,w1) ⊨ α). Den siste konjunkten her impliserer (3) (M,w1) ⊨ ~α. Anta nå for vilkårlig w;2 at (4) w;2êW & wRw;2. Fra dette, (1),(2) og forutsetning (i) i satsen følger (5) w;2=w1. Men fra dette og (3) følger (M,w;2) ⊨ ~α. Siden w;2 var vilkårlig har vi nå bevist:

(Ay)(wRy & yêW → (M,y) ⊨ ~α). Fra dette, valuasjonsregelen for T(α) og (1) kan man slutte at (M,w) ⊨ T(~α). Dette viser at (+) holder. **QED.**

Om C betegner klassen av alle de modeller som oppfyller kravet (i) i dette teoremet kan man ved hjelp av denne satsen og hva vi tidligere har bevist konkludere med at alle teoremene i Kη- [B9] er gyldige i enhver modell i C.

Man ser fra det vi har bevist ovenfor at det er en viss korrespondanse mellom aksiomskjemaene B1,B4-B7 og B9 og visse krav som kan pålegges en modell. I den neste paragrafen skal vi systematisk gi navn til disse kravene.

§8 Fullstendighetsbevis for utvidelser av Kη-

Vi skal i det følgende bevise fullstendighetsresultater for endel av de kalkylene som fremkommer når man utvider Kη- med et eller flere av aksiomskjemaene B1, B4 - B9. La Δ være en delmengde av {B1, B4,...,B9}. Vi betegner systemet man får når man utvider systemet Kη- med alle aksiomskjemaene i klassen Γ med Kη-[Γ]. Man kan da vise at det for alle systemene Kη-[{B1}UΔ] finnes en velavgrenset klasse av modeller K({B1}UΔ) slik at for enhver formel α i L har man at Kη-[{B1}UΔ] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell i klassen K({B1}UΔ).

Som vi nevnte avslutningsvis i forrige fremgår det at det svarer visse krav til relasjonen R til de ulike aksiomskjemaene A2 og B1, B4 - B9.

Definisjon 8.1 Anta M=<W,R,q,f,V> er en modell for L. Da sier vi at modellen M oppfyller kravet Ki hvis og bare hvis den oppfyller det korresponderende kravet på listen nedenfor:

K1 (Aw)(wêW → wêq → (Ey)(yêW & wRy))
K2 (Ax)(Ay)(x,yêW → (xêq & xRy → yêq))
K3 (Ax)(Ay)(Az)(xêq → (xRy &yRz →xRz))
K4 (Ax)(Ay)(xêq → (xRy → (Ez)(zêW &xRz &zRy)))
K5 (Ax)(Ay)(x,yêW →(xêq & xRy → yRy))
K6 (Ax)(Ay)(x,yêW→(xêq & xRy → (Az)(zêW & yRz → z=y)))
K7 (Ax)(Ay)(x,yêW →(xêq & xRy → (Az)(xRz → y=z)))

Fra denne listen over krav og resultatene i forrige paragraf ser man at kravet K1 svarer til aksiomet A2, videre at kravet K2 svarer til B1, og at kravene K3,K4,K5, K6 og K7 svarer til henholdsvis aksiomskjemene B4,B5, B6, B7 og B9.

Vi starter med systemet Kη-[B1], dvs. det systemet man får når Kη- utvides med aksiomet η→T(η). Vi viser først det følgende teorem:

Teorem 8.1 Anta M=<W,R,q,f,V> være den Kη-[B1] kanoniske modellen for L. Da har man at M oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêW → (xêq & xRy → yêq))

Bevis: Anta for vilkårlige x,y at (1) x,yêW og dessuten at (2) xêq &xRy. Fra den første konjunkten i (2) og Definisjon 6.1 følger at (3) ηêw. Fra den andre konjunkten i (2) og den samme definisjonen følger at man har: (3) (Aα)(T(α)êx → αêy). Siden alle elementene i W er Kη-[B1] maksimale har vi, siden Kη-[B1] |- η→T(η), at (4) (η→T(η))êx i følge

lemmaet for maksimale mengder. Fra (3), (4) og det samme lemmaet følger T(η)êx. Men fra dette og (3) har man ηêy og derfor ved hjelp av Definisjon 6.1 at yêq. Dette viser at kravet i satsen holder. **QED.**

La C akkurat her betegne klassen av alle de modeller som oppfyller kravet K2. Man ser lett ved hjelp av Teorem 7.3 og Teorem 3.2 at alle teoremer i Kη-[B1] er gyldige i enhver modell som er med i C. Anta på den annen side at α ikke er etteorem i Kη-[B1]. Da vi {~α} være en Kη-[B1]-konsistent mengde. Denne kan så utvides til en maksimalt Kη-[B1]-konsistent mengde w. La M=<W,R,q,f,V> være den Kη-[B1] kanoniske modellen for L. Da har vi at M i lys av teorem 8.1 er med i C. Men vi har også (~α)êwêW. Og derfor ved hjelp av Hovedlemma 6.2 (M,w) ⊨ ~α. Det følger da at α ikke kan være gyldig i enhver modell i C. Fra dette følger at Kη-[B1] er komplett med hensyn på modellklassen C. Dette viser at følgende sats holder:

Korollar 8.1 (Fullstendighets resultat for Kη-[B1]) Anta C er mengden av alle de modeller som oppfyller kravet K2. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man Kη-[B1] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

Vi skal nå vise et tilsvarende resultat for Kη-[B1,B4]

Teorem 8.2 Anta M=<W,R,q,f,V> være den Kη-[B1,B4] kanoniske modellen for L. Da har man at M oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêW → (xêq & xRy → yêq))
(ii) (Ax)(Ay)(Az)(xêq → (xRy &yRz →xRz))

Bevis: På samme måte som i beviset for Teorem 8.1 viser man at M oppfyller kravet (i). Vi nøyer oss derfor med å bevise at M oppfyller kravet (ii). Anta derfor For vilkårlige x,y og z at (1) xêq & xRy & yRz. Fra dette og Definisjon 6.1 følger:

(2.1) ηêx
(2.2) (Aα)(T(α)êx → αêy)
(2.3) (Aα)(T(α)êy→ αêz)

Nå har man Kη-[B1,B4] |- η → (T(α) → T(T(α)). Fra dette (2.1) og lemmaet for maksimale mengder følger: (3) (Aα)(T(α)êx → T(T(α))êx). Vi må nå vise at xRz. Det vil være i lys av Definisjon 6.1 tilstrekkelig å bevise: (4) (Aα)(T(α)êx → αêz). Anta derfor for vilkårlig α at T(α)êx. Fra dette og (3) følger T(T(α))êx. Herav følger ved hjelp av (2.2) at T(α)êy. Og fra dette og (2.3) har vi det vi ønsker, nemlig αêz. Dette viser at (4) holder og følgelig at M oppfyller kravet (ii). **QED.**

På samme måte som ovenfor kan man nå konkludere med:

Korollar 8.2 (Fullstendighets resultat for Kη-[B1,B4]) Anta C er mengden av alle de modeller som oppfyller kravene K2, K3. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man Kη-[B1,B4] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

Vår neste forehavende er å bevise:

Teorem 8.3 Anta M=<W,R,q,f,V> være den Kη-[B1,B5] kanoniske modellen for L. Da har man at M oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêW → (xêq & xRy → yêq))
(ii) (Ax)(Ay)(xêq → (xRy → (Ez)(zêW &xRz &zRy)))

Bevis: På samme måte som i beviset for Teorem 8.1 beviser man at M oppfyller kravet (i). Vi må derimot bevise at M oppfyller det andre kravet. Anta derfor for vilkårlige elementer x,yêW at (1) xêq & xRy. Fra dette følger ved hjelp av Definisjon 6.1 at:

(2.1) ηêx

(2.2) (Aα)(T(α)êx → αêy)

Siden B5 er et aksiomskjema i Kη-[B1,B5] har vi Kη-[B1,B5] |- η → T(T(α)) → T(α). Fra dette, (2.1) og lemmaet om maksimale mengder har vi

(3) (Aα)(T(T(α))êx → T(α)êx). Fra dette og (2.2) følger:

(4) (Aα)(T(T(α))êx → αêy)

Vi må nå konstruere en maksimalt konsistent mengde z slik at xRz og zRy. Sett per definisjon: (5) X= {α: T(α)êx} & Y = {CT(α): αêy}. Vi skal vise at XUY er en konsistent formelmengde. Anta for reduktio ad absurdum at XUY er inkonsistent. Da må det finnes formler α;1,...,α;n og β;1,...,β;m der vi har

(6) α;1,...,α;nêX & CT(β;1),...,CT(β;m)êY & (β;1,....,β;m êy)

og dessuten:

(8) |- ~(α;1& ...& α;n& CT(β;1) &....& CT(β;m)) Fra dette følger:

(9) |- ~(η & α;1& ...& α;n & CT(β;1) &....& CT(β;m)) Herav har vi så ved hjelp av ren setningslogikk:

(10) |- η→ (α;1& ...& α;n → ~(CT(β;1) &....& CT(β;m))) Siden CT(α) per definisjon er ekvivalent med ~T(~α). Har man fra (10):

(11) |- η→ (α;1& ...& α;n → (T(~β;1) v....v T(~β;m))) Nå har man for alle jê{1,...,m} (12) |- η → T(~β;j) → T(~(β;1&...&β;m)) . Fra (11) og (12) følger ved hjelp av ren setningslogikk: (13) |- η→ (α;1& ...& α;n → T(~(β;1&....&β;n))). Fra dette kan man utlede ved hjelp av R2 og A1 som begge er inkludert i kalkylen Kη-[B1,B5] at:

(14) |- η →: T(η) → .T(α;1)& ....&T(;n) → T(T(~(β;1&....&β;n))) Fra (5) følger:

(15) T(α;1),.....,T(α;n)êx. Siden B1 er et aksiom i Kη-[B1,B5] har vi

(16) (η→T(η))êx . Fra (14), (15), (16) og lemmaet om maksimale mengder, kan vi slutte:

(17) T(T(~(β;1&....&β;n)). Men fra dette og (4) har vi (~(β;1&....&β;n))êy og derfor ved hjelp av lemma om maksimale mengder at (18) ~((β;1&....&β;n)êy)). Men fra den siste konjunkten i (6) og lemma om maksimale mengder følger (β;1&....&β;n)êy som åpenbart strider mot (18).

Dette viser at XUY er konsistent og at det derfor, etter Lindenbaums lemma, finnes en maksimalt konsistent mengde z slik at (19) XUY Inkl z. Siden X Inkl z følger

(20) (Aα)(T(α)êx → αêz). Siden Y Inkl z følger

(21) (Aα)(αêy → CT(α)êz). (21) impliserer per definisjon:

(22) (Aα)(αêy → ~T(~α)êz). Herav har vi så ved hjelp av lemma om maksimale mengder: (23) (Aα)(T(~α)êz → (~α)êy). Anta nå for vilkårlig α at (24) T(α)êz. Vi har (25) |- η → T(α) → T(~~α). Siden vi ifølge (2.1) har at ηêx og siden vi har |- η→ T(η) følger at T(η)êx. Fra dette og (20) følger ηêz. Fra dette, (24), (25), det faktum at z er en maksimalt konsistent mengde og lemma om maksimale mengder følger T(~~α)êz. Fra dette og (23) følger (~~α)êy og derfor αêy. Siden α var vilkårlig formel der (24) holdt har vi vist:

(26) (Aα)(T(α)êz → αêy). Fra (20) og (26) følger xRz & zRy. Det følger at (Ez)(zêW & xRz & zRy). Det følger at M oppfyller kravet (ii).[3] **QED.**

[3] Dette beviset er langt vanskeligere enn de andre. Som man ser er det nødvendig å konstruere en maksimalt konsistent mengde med de ønskede egenskaper. Den vesentlige ideen her, som ikke er særlig lett å komme på av seg selv, nemlig å betrakte mengdene X og Y og vise at unionen av dem er konsistent, har vi hentet fra et teorem som er bevist i Chellas [1] på side 159, 160. Bevisteknikken kan man også finne i Lemmon [1].

På samme måte som ovenfor kan vi fra resultatet ovenfor også utlede:

Korollar 8.3 (Fullstendighets resultat for Kη-[B1,B5]) Anta C er mengden av alle de modeller som oppfyller kravene K2, K4. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man Kη-[B1,B5] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C.

Vi skal så studere systemet Kη-[B1,B6]. Vi skal bevise

Teorem 8.4 Anta M=<W,R,q,f,V> være den Kη-[B1,B6] kanoniske modellen for L. Da har man at M oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêW → (xêq & xRy → yêq))

(ii) (Ax)(Ay)(xêq → (xRy → (yRy))

Bevis: På samme måte som i beviset for Teorem 8.1 beviser man at M oppfyller kravet (i). Vi må derimot bevise at M oppfyller det andre kravet. Anta derfor for vilkårlige x,y at (1) xêq & xRy. Fra dette og Definisjon 6.1 følger:

(2) ηêx og (3) (Aα)(T(α)êx → αêy). Siden vi har Kη-[B1,B5] |- η→T(T(α)→α) for alle α, følger ved hjelp av (2) og lemmaet om maksimale mengder:

(4) (Aα)(T(T(α)→α)êx.). Men fra dette og (3) følger (5) (Aα)(T(α)→α êy). Ved hjelp av lemmaet om maksimale mengder kan vi fra (5) slutte at

(6) (Aα)(T(α)êy → αêy). Men fra dette og definisjonen av R i en kanonisk modell følger det vi ønsker, nemlig: yRy. Dette viser at M oppfyller kravet (ii). **QED.**

På samme måte som tidligere kan vi nå utlede:

Korollar 8.4 (Fullstendighets resultat for Kη-[B1,B6]) Anta C er mengden av alle de modeller som oppfyller kravene K2, K5. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man Kη-[B1,B6] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C.

Det neste systemet vi er interessert i ta opp er Kη-[B1,B7] Vi skal vise:

Teorem 8.5 Anta M=<W,R,q,f,V> være den Kη-[B1,B7] - kanoniske modellen for L. Da har man at M oppfyller følgende krav:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêW → (xêq & xRy → yêq))

(ii) (Ax)(Ay)(xêq → (xRy → (Az)(yRz → z=y))

Bevis: På samme måte som i beviset for Teorem 8.1 beviser man at M oppfyller kravet (i). Vi må derimot bevise at M oppfyller det andre kravet. Anta derfor (1) xêq & xRy & yRz for vilkårlige x,y,z êW. Fra (1) og Definisjon 6.1 følger:

(2) ηêx (3) (Aα)(T(α)êx → αêy). Siden vi har Kη-[B1,B7] |- η→T(α→T(α)) for alle α i L har vi ved hjelp av (2) og lemmaet om maksimale mengder at

(4) T(α→T(α))êx for alle formler α. Fra dette og (3) følger at

(5) (Aα)((α→T(α))êy). Siden y er en maksimalt konsistent mengde kan vi fra dette slutte ved hjelp av lemmaet for maksimale mengder at (6) (Aα)(αêy → T(α)êy). Fra den siste konjunkten i (1) og Definisjon 6.1 følger: (7) (Aα)(T(α)êy → αêz). Fra dette og (6) har man: (8) y Inkl z. Anta for reduktio at y<>z. Da må det finnes en formel β der (9) βêz & ~(βêy). Fra det siste har vi ved hjelp av lemmaet om maksimale mengder at (10) (~β)êy. Men siden y Inkl z følger da (~β)êz & βêz. Dette er umulig ifølge lemmaet om maksimale mengder. Det følger at y=z. Dette viser at M oppfyller kravet (ii). **QED.**

På samme måte som tidligere kan vi man utlede:

Korollar 8.5 (Fullstendighets resultat for Kη-[B1,B7]) Anta C er mengden av alle de modeller som oppfyller kravene K2, K6. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man Kη-[B1,B7] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C.

Det siste vi skal se på er aksiomet B9, ie η→ T(α) v T(~α). Dette er ikke spesielt plausibelt i seg selv om man tolker "T(α)" som "a tror at α" siden det innebærer at trosfeltet til a er en fullstendig teori gitt at det er rasjonelt organisert. Det er neppe noen grunn til å tro at dette er noen logisk sannhet. Vi har imidlertid:

Teorem 8.6 Anta M=<W,R,q,f,V> være den Kη-[B9] - kanoniske modellen for L. Da har man at M oppfyller følgende krav:

(ii) (Ax)(Ay)(x,yêW →(xêq & xRy → (Az)(xRz → y=z)))

Bevis: Vi må vise at M oppfyller kravet (i): Anta derfor for vilkårlige x,y,zêW at følgende holder:

(1) xêq & xRy & xRz

Ved hjelp av definisjonen av en kanonisk modell følger fra (1):

(2) ηêx

(3) (Aα)(T(α)êx → αêy)

(4) (Aα)(T(α)êx → αêz)

Siden x er en en Kη-[B1,B9] -maksimalt konsistent mengde og vi har at η→ T(α) v T(~α) er et teorem i Kη-[B1,B9] følger ved hjelp av (2) og lemmaet om maksimale mengder at:

(5) (Aα) ((T(α)v T(~α)) êx) Anta nå for reduktio ad absurdum at (6) y<>z. Da kan vi sondre mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): Det finnes en formel β der vi har (7) βêy & ~(βêz). Fra den siste konjunkten i (7) følger ved hjelp av (4): ~(T(β)êx) og derfor ved hjelp av lemmaet for maksimale mengder at (8) (~T(β))êx. Fra dette og (5) har vi ved hjelp av lemmaet for maksimale mengder att T(~β)êx. Men fra dette og (3) følger (~β)êy og derfor ~(βêy) som strider mot (7).

Tilfelle (ii) Det finnes en formel β der vi har (9) ~(βêy) & βêz. Da følger ved hjelp av den første konjunkten i (9) og (3) at ~(T(β)êx. Da har man (~T(β))êx. Sammen med (5) gir dettte ved hjelp av lemmaet for maksimale mengder: T(~β)êx. Men fra dette og (4) følger (~β)êz som impliserer ~(βêz). Men dette strider mot den andre konjunkten i (9).

I begge tilfelle utleder vi en motsigelse. Det følger at (6) e\ikke holder og derfor at y=z. Dette viser at M oppfyller kravet (i) **QED.**

På samme måte som tidligere kan vi vise ved hjelp av Teorem 7.6:

Korollar 8.6 (Fullstendighets resultat for Kη-[B9]) Anta C er mengden av alle de modeller som oppfyller kravet K7. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man Kη-[B9] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C.

På dette punkt kan det være passe å foreta en oppsummering. Vi har sett at det til aksiomskjemaene B2, B4,B5,B6,B7 og B9 svarer visse krav, nemlig kravene K3,K4,K5, K6 og K7. Til en hvilken som helst delmengde Δ av aksiomskjemaene B4, B5, B6, B7 og B9 vil det finnes en tilsvarende delmengde av kravene K3- K7, Δ;c. Tilsvarende vil det til enhver mengde X av aksiomskjemaer der X= B1UΔ og Δ er en delmengde av {B4,B5,B6,B7,B9} svare en mengde krav X;c. Blandt disse kravene vil altid kravet K2 inngå.

Det vi nå kan gjøre er å formulere et mer generelt resulatet på basis av alle de resultatene vi har bevist i denne paragrafen og i §7. Resultatet er dette:

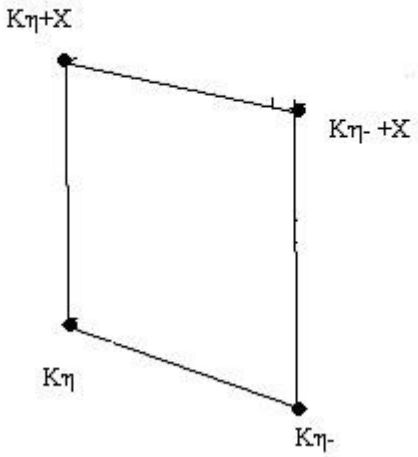
Teorem 8.7 (i) La C være klassen av alle de modeller som oppfyller kravene i mengden X;c. Da gjelder, for enhver formel α i L, at α er et teorem i kalkylen Kη- +X hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C.

(ii) La C være klassen av alle de modeller som oppfyller kravet K1 samt alle de kravene som inngår i mengden X;c. Da har vi for hver formel α i L at α er et teorem i kalkylen Kη+X hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

Dette teoremet omfatter en betraktelig mengde med kalkyler. Beviset er lett å gi på basis av alt det vi har samlet sammen av bevis så langt.

Det må imidlertid ikke underslås at vi ikke har vist, hverken gyldighet eller fullstendighet, til en del kalkyler som det er svært nærliggende å betrakte, for eksempel kalkylen Kη- utvidet med aksiomskjemaene B4- B7 alene, dvs. Kη-[S] der S enten er B4, B5, B6, B7. Saken er den at krav på modellene som gjør disse aksiomskjemaene gyldige uten at man krever at q er lukket under R ikke er helt enkelt å formulere. Vi har i det minste ikke gjort det her. Saken krever ettertanke. Vi har derfor nøyd oss med resultatet ovenfor. Som oppsummering så langt anfører vi det følgende diagram som viser inklusjonsforholdene mellom de kalkylene vi hittil har vist fullstendigheten til.

Figur



Hvis en linje på denne figuren fører fra en kalkyle K til en annen, K', som ligger ligger lavere innebærer dette at alle teoremene i den sistnevnte kalkyle er blandt dem i den førstnevnte. Som man ser av figuren er alle teoremene i Kη- inkludert blandt teoremene i både Kη og Kη- +X. Teoremene i disse kalkylene er også på sin side inkludert blandt teoremene i Kη+X. Man kan ikke uten videre avlese fra figuren at inklusjonsforholdene er strenge. Men i dette tilfelle vil de være det selvom vi ikke så langt har gitt noe bevis for det.

§9 Epistemiske setningslogikker

Vi har tidligere avgrenset en klasse av modeller for L og definert hva som menes med at en formel i L er gyldig i en modell, og hva som menes med at den er gyldig. Operatoren T har det hele tiden vært meningen at skulle tolkes som " a tror at _", setningskonstanten "η" skulle

tolkes "mengden av alle de utsagn som a tror utgjør en konsistent, ikke-tom, deduktivt og konjunktivt lukket mengde".

Det er imidlertid nærliggende å gi T en epistemisk tolkning, dvs. lese formler av typen "T(α)" som "a vet at α" og ikke som tidligere "a tror at α". Gjør vi det må også "η" omtolkes. Den må nå leses som "mengden av alle de utsagn som a vet er sanne utgjør en konsistent, ikke-tom, deduktivt og konjunktivt lukket mengde" eller "kunnskapsfeltet til a er rasjonelt organisert". Legges denne tolkningen av T til grunn vil også den følgende formel være gyldig:

(1) $T(\alpha)\rightarrow\alpha$

I denne forbindelse skal vi også betrakte det litt svakere skjemaet:

(2) $\eta\rightarrow(T(\alpha)\rightarrow\alpha)$

Med den lesemåten som vi nå har fastlagt for T er det selvfølgelig noe unaturlig å bare ta med (2). Det er neppe bare for personer hvis kunnskapsfelt er rasjonelt organisert det gjelder at α er tilfelle dersom de vet at α er tilfelle. Men hvis (1) er gyldig er åpenbart også (2) gyldig siden sistnevnte formel er logisk sett implisert av den førstnevnte.

Man ser lett at (1) og (2) ikke er gyldige relativt til noen av de modellklassene vi så langt har definert.

Definisjon 9.1 En modell $M=<W,R,q,f,V>$ kalles en *strengt epistemisk modell* hvis og bare hvis den oppfyller følgende to krav:

(i) $(Aw)(w\hat{e}q \rightarrow wRw)$

(ii) $(Aw)(w\hat{e}(W-q) \rightarrow (A\alpha)(\alpha\hat{e}f(w) \rightarrow (M,w) \models \alpha))$

Vi trenger også den følgende definisjon:

Definisjon 9.2 En modell $M=<W,R,q,f,V>$ kalles en *svakt epistemisk modell* hvis og bare hvis den oppfyller følgende krav:

(i) $(Aw)(w\hat{e}q \rightarrow wRw)$

Vi skal nå vise at skjemaet (1) er gyldig i alle strengt epistemiske modeller, og at skjemaet (2) er gyldig i alle svakt epistemiske modeller. Siden alle de epistemiske modellene, hva enten de er strenge eller svake, er en underklasse av alle modeller for L følger det fra gyldighetsaksiomet for Kη- at alle Kη- teoremene i L også holder i de epistemiske modellene.

Teorem 9.1 (a) Man har at skjemaet $T(\alpha)\rightarrow\alpha$ er gyldig i alle strengt epistemiske modeller. (b) Skjemaet $\eta\rightarrow(T(\alpha)\rightarrow\alpha)$ er gyldig i alle svakt epistemiske modeller. (c) Det finnes svakt epistemiske modeller hvor skjemaet $T(\alpha)\rightarrow\alpha$ ikke er gyldig.

Bevis: *Ad (a)*: Anta $M=<W,R,q,f,V>$ er en vilkårlig strengt epistemisk modell for L og at w er et vilkårlig element i w. Anta videre (1) $(M,w) \models T(\alpha)$. I lys av valuasjonsregelen for operatoren T har vi da:

(2) $(M,w) \models T(\alpha) \leftrightarrow (w\hat{e}q \,\&\, (Aw')(wRw' \rightarrow (M,w) \models \alpha) \vee (w\hat{e}(W-q) \,\&\, \alpha\hat{e}f(w))$

Vi sondrer mellom to tilfelle. Tilfelle (i): (3) $w\hat{e}Q$. Da har vi ved hjelp av (2) at (4) $(Aw')(wRw' \rightarrow (M,w') \models \alpha)$. Siden M er en strengt epistemisk modell har vi at R er refleksiv og derfor siden $w\hat{e}q$ at (5) wRw. Fra dette og (4) følger så det vi ønsker nemlig (6) $(M,w) \models \alpha$. Tilfelle (ii): (7) $w\hat{e}(W-q)$. Da følger, igjen ved hjelp av (2), at (8) $\alpha\hat{e}f(w)$. Siden M er en strengt epistemisk modell oppfyller den kravet (ii) i Definisjon 9.1. Dette og (8) impliserer så $(M,w) \models \alpha$.

I begge tilfelle har vi (M,w) ⊨α. Dette viser at (M,w) ⊨ α. Siden M og w var vilkårlige følger det at T(α) → α er gyldig i alle strengt epistemiske modeller. Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Anta M=<W,R,q,f,V> er en vilkårlig svakt epistemisk modell for L og at w er et vilkårlig element i w. Anta videre (9) (M,w) ⊨ η & (M,w) ⊨T(α). Fra valuasjonsreglene for T og η følger da at (10) (Aw')(wRw' → (M,w') ⊨α). Siden M er en svakt epistemisk modell har vi (11) (Aw)(wêq → wRw). Fra første halvdel av (9) følger: wêq. Dette, (10) og (11) impliserer det vi ønsker, nemlig: (M,w) ⊨ α. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Vi definerer en svakt epistemisk modell M på følgende måte. Sett (12) W={w1,w2,w3,w4} der de fire elementene er distinkte. Vi definerer R på følgende måte: (13) R= {<w1,w1>,<w1,w2>, <w1,w3>, <w1,w4>} Definer videre q ved (14) q={w1} . Definer f ved slik: (15) f(wi)= {¬p;0} for i=2,3,4. Definer endelig V ved å sette: (16) V(p;0) = {w2,w3,w4} og V(p;i)=ø om i>=1. Dermed er modellen M=<W,R,q,f,V> fullstendig definert. Man ser lett fra (12) - (16) at M oppfyller kravene til en modell. Videre ser man at (17) (Aw)(wêq → wRw). Modellen oppfyller derfor de krav som stilles til en svakt epistemisk modell. Nå har man w4êV(p;0) og derfor at (18) (M,w4) ⊨ ¬¬ p;0. Videre ser man at ¬(w4êq) & at (¬p;0)êf(w;4). Det følger at (19) (M,w4) ⊨ T(¬p;0). Setter man α= ¬p;0. Har vi (M,w4) ⊨ (T(α) & ¬α). Dette viser at det finnes svakt epistemiske modeller, f.eks. den M som vi har definert, hvor skjemaet T(α)→α ikke er gyldig.

Dette avslutter beviset for Teorem 9.1. **QED**

Det er ingen fullkomment opplagt sak at det finnes strengt epistemiske modeller i den betydning vi har innført. Om man begrenser seg til de modeller der q=W og hvor R er refleksiv over q er det klart at disse er strengt epistemiske. Men dette er tross alt en mer spesiell klasse. Et mer interessant spørsmål er om man kan konstruere en strengt epistemisk modell der W-q ≠ ø. Dette er strengt tatt ikke så vanskelig. Vi gir det følgende eksempel:

Konstruer en modell M=<W,R,q,f,V> ved å sette (1) W={w1,w2,w3,w4} der de fire elementene er distinkte. Definer R ved å sette: (2) R= {<w1,w1>,<w1,w2>, <w1,w3>, <w1,w4>} og q ved: (3) q={w1}. Man ser da at R er refleksiv over q. Sett videre (4) V(p;i) = {w2,w3,w4} om iêN . Tilslutt setter vi f(w;i) = {p;1} om i=2,3,4. Dermed er modellen fullstendig definert.

Det skulle være enkelt å se at denne modellen oppfyller de krav som er stilt til en modell i Definisjon 3.1. Videre er det klart at den oppfyller det første kravet i definisjonen av en strengt epistemisk modell. Anta nå for vilkårlig w at wêW-q. Da har vi i lys av (1) og (3) rett ovenfor at wê {w2,w3,w4}. Fra definisjonen av V har man da wêV(p;1) og derfor at (M,w) ⊨ p;1. Men vi har også om wêW-q at p;1êf(w). Det følger at M også oppfyller det andre kravet i definisjonen av strengt epistemisk modell.

Vi skal kalle skjemaet T(α)→α for E1 og skjemaet η→(T(α)→α) for E2. Systemet Kη-[E1] er systemet Kη- utvidet med E1 som nytt aksiomskjema. Systemet Kη-[E2] er systemet Kη- utvidet med E2 som nytt aksiomskjema.

Det skulle være klart fra alt det som har blitt sagt i tidligere paragrafer hvordan man konstruerer en kanonisk Kη-[E1] modell og tilsvarende for system Kη-[E2]

Det er nå mulig å bevise det følgende teorem:

Teorem 9.2 (a) La M=<W,R,q,f,V> være den kanoniske Kη-[E1]-modellen for L. Man har da at M er en strengt epistemisk modell. (b) La M=<W,R,q,f,V> være den kanoniske Kη-[E2]-modellen for L. Man har da at M er en svakt epistemisk modell.

Bevis: Ad (a): La M=<W,R,q,f,V> være den kanoniske Kη-[E1]-modellen for L. Denne konstrueres på samme måte som tidligere, dvs. nøyaktig som beskrevet i §6. Fra hovedlemma 6.2 i den nevnte paragraf følger det at vi har for alle formler α i L og wêW at

(1) αêw ↔ (M,w) ⊨ α

Vi må først vise at (2) (Aw)(wê(W-q) → (Aα)(αêf(w) → (M,w) ⊨α)). Anta derfor (3) wêW-q & αêf(w) for vilkårlig α og w. Fra definisjonen av f i en kanonisk modell følger da fra den andre konjunkten i (3) at (4) αêMg(β: T(β)êw). herav har vi så (5) T(α)êw. Siden w er en maksimalt konsistent mengde har vi (5) (T(β)→β) êw for alle formler β i L. Dette er selvfølgelig fordi E1 er et aksiom i Kη-[E1]. Fra (4) og (5) og hjelpesetningen om egenskaper til maksimalt konsistente mengder følger det at αêw. Fra dette og (1) følger så det vi ønsker, nemlig (M,w) ⊨ α). Dette viser at (2) holder.

Det er imidlertid også nødvendig å vise at man har (6) (Aw)(wêq → wRw). Anta derfor for vilkårlig w at wêq. Fra definisjonen av den kanoniske modellen M følger da at ηêw. Siden w er maksimalt konsistent må vi ha (T(α)→α)êw for alle formler α i L. Ved hjelp av hjelpesetningen om egenskaper til maksimalt konsistente mengder følger det da at vi også har (Aα)(T(α)êw → αêw). Men etter definisjonen av R i en kanonisk modell følger fra dette at wRw. Dette viser at også (6) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): La M=<W,R,q,f,V> være den kanoniske Kη-[E2]-modellen for L. Vi må vise at denne er en svakt epistemisk modell. Det vil da være tilstrekkelig å vise at (6) rett ovenfor holder. Anta derfor wêq for vilkårlig w. Fra definisjonen av komponenten q i den kanoniske modellen M følger da (7) ηêw. Siden w er maksimalt konsistent og E2 er et aksiomskjema i Kη-[E2] har vi (η→ (T(α)→ α))êw. Fra dette, (7) og hjelpesetningen om viktige egenskaper til maksimalt konsistente mengder følger at (T(α)→α)êw for alle α. På samme måte som under beviset for det forrige punkt følger herav (Aα)(T(α)êw → αêw). Men fra dette og definisjonen av R følger da wRw. Dette viser at (6) holder og at M er en svakt epistemisk modell. Dermed har vi også bevist punkt (b) i satsen. **QED**

Ved hjelp av Teorem 9.2 kan man på samme måte som vi har vist i tidligere tilfelle utlede det følgende fullstendighetsteorem:

Teorem 9.3 (a) La C være klassen av alle strengt epistemiske modeller. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E1] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

(b) La på den annen side C være klassen av alle svakt epistemiske modeller. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E2] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

Resultatet gjelder kalkylene Kη-[E1] og Kη-[E2]. Som man skjønner er det nokså opplagt at man kan bevise lignende resultater for kalkylen Kη utvidet med henholdsvis E1 og E2. Vi har derfor også at den følgende sats holder:

Teorem 9.4 (a) La C være klassen av alle strengt epistemiske modeller som oppfyller kravet:
(Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy)). La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E1] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

(b) La på den annen side C være klassen av alle svakt epistemiske modeller som oppfyller kravet (Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy)). . La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E2] |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

På samme måte som vi betraktet utvidelsene Kη- +X og Kη+X av kalkylene Kη- og Kη, kan man nå betrakte tilsvarende utvidelser av Kη-[E1], Kη[E1], Kη-[E2] og Kη[E2]. Det blir fire slike utvidelser, nemlig Kη-[E1]+X, Kη[E1]+X, Kη-[E2]+X og Kη[E2]+X. På basis av de resultatene vi så langt har samlet sammen ser man at det også er lett å gi fullstendighetsbevis for de fire siste kalkylene som fremkommer ved å legge til aksiomet B1 og en eller annen delmengde av aksiomene B4,B5,B6,B7 og B9 til henholdsvis Kη-[E1], Kη[E1], Kη-[E2] og Kη[E2]. Man kan derfor si at vi i det vesentlige også har gitt bevis for den følgende mer omfattende sats:

Teorem 9.5 (a) La C være klassen av alle strengt epistemiske modeller som oppfyller alle kravene i X;c. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E1]+X |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

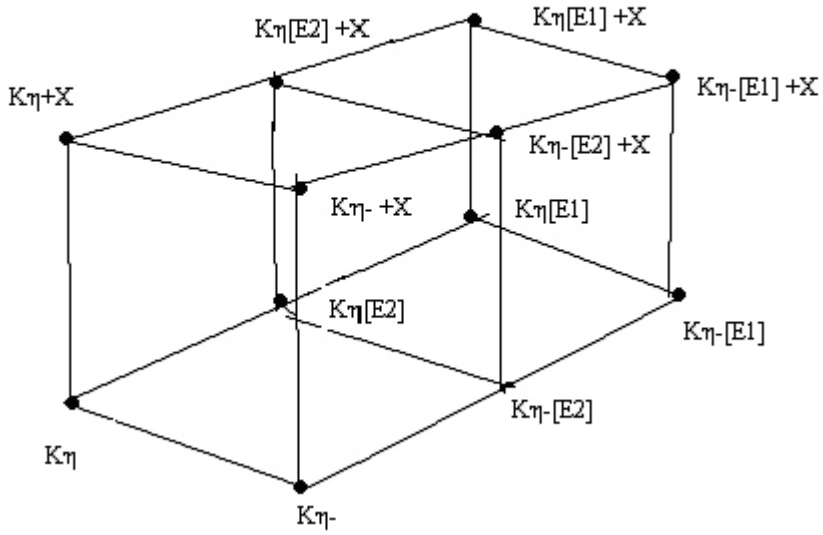
(b) La på den annen side C være klassen av alle svakt epistemiske modeller som oppfyller alle kravene i X;c. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E2]+X |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

(c) La C være klassen av alle strengt epistemiske modeller som oppfyller kravet: (Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy)) samt alle kravene i X;c. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E1]+X |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

(d) La på den annen side C være klassen av alle svakt epistemiske modeller som oppfyller kravet (Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy)) samt alle kravene i X;c. La α være en vilkårlig formel i L. Da har man at Kη-[E2]+X |- α hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell som er med i C

Figuren som vi presenterte i forrige paragraf og viste en oversikt over inklusjonsforholdene mellom de systemene som vi inntil da hadde kommentert kan nå utvides slik at vi også får med oss alle de systemene som har blitt omtalt i denne paragrafen:

Figu



Figuren skal naturligvis tolkes på nøyaktig samme måte som den som ble presentert til slutt i §8.

§10 Systemer der logisk ekvivalente setninger kan erstattes salva veritate.

I systemet Kη- har vi ikke at logisk ekvivalente setninger kan substitueres fritt i enhver kontekst, også innenfor området til operatoren T. I en formel av typen η→ T(α) der α innholder en subformel β kan man erstatte denne formelen β med en annen logisk ekvivalent formel γ slik at resulatet η→ T(α') blir logisk ekvivalent med η→T(α). Men dette er ikke noe som gjelder generelt. Gitt at |- β↔γ kan man for eksempel ikke fra |- T(αvβ) slutte at |- T(αv γ). Nå kunne man være interessert i kalkyler der man nettopp kan tillate seg å gjøre dette. Vi skal derfor studere det systemet som man får fra Kη- ved å legge til den følgende regel som vi kaller RE:

RE |- α↔ β → |-T(α) ↔ T(β)

Dette systemet skal vi tillate oss å kalle KEη-.

Gitt dette systemet er det naturlig å betrakte en semantisk teori som speiler systemets syntaktiuske struktur. En modell defineres i det vesentlige på den samme måten som før, men vi endrer på definisjonen av f. Er nå M=<W,R,q,f,V> en modell for L skal nå f *ikke* være en funksjon fra W-q inn i Pt(Fm(L)), potensmengden av formler i L, men derimot en funksjon som tilordner hver verden i mengden W-q en mengde av delmengder av mulige verdener. Vi krever altså at f: W-q → Pt(Pt(W)). Tenker vi oss at de diverse delmengder av W representerer utsagn skal altså f være en funksjon som tilordner ethvert element i mengden W-q en mengde med utsagn. Vi skal kalle modeller som oppfyller disse kravene for KE-modeller for L. De er mer formelt avgrenset ved den følgende definisjon:

Definisjon 10.1 Med en KE-modell M for språket L forstås et tuple M=<W,R,q,f, V> der de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) W er en ikke-tom mengde. De enkelte elementene kalles punktene i modellen.
(ii) R er en relasjon over W, det vil si at R Inkl WxW
(iii) q er en delmengde av W som ikke nødvendigvis må være ikke-tom
(iv) f er en funksjon der vi har: f: W-q → Pt(Pt(W))
(v) V er en funksjon som tilordner setningskonstanten η mengden q og som tilordner enhver av setningsvariablene en delmengde av W

Modeller som oppfyller kravet (Aw)(wêq → (Ey)(yêW & wRy)) skal vi kalle for KEη-modeller for L. Skjemaet η→ ¬T(α&¬α) holder ikke i enhver KE-modell, men det holder i enhver modell som oppfyller dette tilleggskravet.

Når det gjelder uttrykket "Formelen α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "(M,w) ⊨α" må dette redefineres i forbindelse med KE-modellene. Valuasjonsregelen for operatoren T kan ikke lenger formuleres som før men må erstattes av den følgende klausul:

(M,w) ⊨ T(α) ↔ (wêq & (Aw')(w'êW & wRw' → (M,w') ⊨α))
v (wê(W-q) & {w: (M,w) ⊨α}êf(w))

Den formelle definisjonen av (M,w) ⊨ α kan derfor formuleres slik:

Definisjon 10.2 Anta M=<W,R,q,f,V> er en modell for L. Anta wêW. Da defineres (M,w) ⊨α induktivt ved lengden på formler på følgende måte:

(i) (M,w) ⊨ p;i ↔ wêV(p;i)

(ii) $(M,w) \models \eta \leftrightarrow w \hat{e} V(\eta)=q$

(iii) $(M,w) \models \alpha \rightarrow \beta \leftrightarrow ((M,w) \models \alpha \rightarrow (M,w) \models \beta)$

(iv) $(M,w) \models \sim\alpha \leftrightarrow \sim((M,w) \models \alpha)$

(v) $(M,w) \models T(\alpha) \leftrightarrow (w \hat{e} q \ \& \ (Aw')(w' \hat{e} W \ \& \ wRw' \rightarrow (M,w') \models \alpha))$
$\vee \ (w \hat{e}(W-q) \ \& \ \{w: (M,w) \models \alpha\} \hat{e} f(w))$

Dette avslutter definisjonen.

Når det gjelder begrepet gyldighet i en modell, og gyldighet absolutt, til en formel i L, gjøres vi oppmerksom på at disse begrepene defineres nøyaktig som før.

Vi må nå vise at gyldighetsteoremet holder for KEη-. Vi har:

Teorem 10.1 Anta α er en formel i L, ie. $\alpha \hat{e} Fm(L)$. Da gjelder:
Hvis KEη- |- α så er α er gyldig i enhver KE-modell.

Bevis: Beviset er nøyaktig som beviset for det tilsvarende teorem i §3, Teorem 3.1. Det eneste nye er at vi må bevise at regelen RE bevarer gyldighet.

Anta derfor at (1) $\alpha \leftrightarrow \beta$ er gyldig. Anta (2) M=<W,R,q,f,V> er en vilkårlig KE-modell, og dessuten (3) $e \hat{e} I$ for vilkårlig w. Det vil da være nok å vise at man har:
(4) $(M,w) \models T(\alpha) \leftrightarrow (M,w) \models T(\beta)$. Fra (1) og (2) følger åpenbart i kraft av relevante definisjoner at (5) $(Aw')(w' \hat{e} I \rightarrow ((M,w') \models \alpha \leftrightarrow (M,w') \models \beta))$

For å vise at (4) holder antar vi først at (6) $(M,w) \models T(\alpha)$. Det er da to muligheter i lys av klausul (v) i Definisjon 10.2: Tilfelle (a): $w \hat{e} q$. I så har vi ved hjelp av (6) at $(Aw')(wRw' \rightarrow (M,w') \models \alpha)$. Fra dette følger ved hjelp av (5) at

(7) $(Aw')(wRw' \rightarrow (M,w') \models \beta)$. Fordi $w \hat{e} q$ har vi da ved hjelp av Definisjon 10.2 at $(M,w) \models T(\beta)$.

Tilfelle (b): Anta på den annen side at $w \hat{e}(W-q)$. Fra dette, (6) og Definisjon 10.2 har man at (8) $\{w': (M,w') \models \alpha\} \hat{e} f(w)$. Fra (5) følger åpenbart at

(9) $\{w': (M,w') \models \alpha\} = \{w': (M,w') \models \beta\}$ Dette og (8) gir en så at $\{w': (M,w') \models \alpha\} \hat{e} f(w)$ som sammen med det forhold at $w \hat{e}(W-q)$ og valuasjonsregelen for T gir en $(M,w) \models T(\beta)$. Vi har nå vist (10) $(M,w) \models T(\alpha) \rightarrow (M,w) \models T(\beta)$.

Ved å bytte om α og β i resonnementet ovenfor ser man at man også har
(11) $(M,w) \models T(\beta) \rightarrow (M,w) \models T(\alpha)$ som sammen med (10) gir en:
(12) $(M,w) \models T(\alpha) \leftrightarrow (M,w) \models T(\beta)$. Men M var en vilkårlig modell og w en vilkårlig verden i M. Det følger at $T(\alpha) \leftrightarrow T(\beta)$ er gyldig i enhver verden i enhver modell og derfor gyldig. **QED.**

§10.1 Om fullstendigheten til systemet KEη-

For å vise fullstendigheten til det systemet KEη- med hensyn på det gyldighetskriterium vi nå har fastlagt er det nødvendig å modifisere noe den konstruksjonen av en kanonisk modell som vi tidligere har brukt. Vi endrer nå Definisjon 6.1 slik at den nå ser slik ut:

Definisjon 10.1.1: Med den S-kanoniske modellen for L forstår vi modellen M=<W,R,q,f,V> der de enkelte komponentene er definert slik:

(i) $W = \{\Delta: S\text{-}Max;k(\Delta)\}$

(ii) $R = \{<\Delta,\Gamma>: S\text{-}Max;k(\Delta) \ \& \ S\text{-}Max;k(\Gamma) \ \& \ (A\alpha)(T(\alpha) \hat{e} \Delta \rightarrow \alpha \hat{e} \Gamma)$

(iii) $q = \{\Delta: S\text{-}Max;k(\Delta) \ \& \ \eta \hat{e} \Delta\}$

(iv) $f = \{<\Delta, \{\{\Delta': S\text{-}Max;k(\Delta') \ \& \ \alpha \hat{e} \Delta'\}: T(\alpha) \hat{e} \Delta\}> : S\text{-}max;k(\Delta) \ \& \neg(\eta \hat{e} \Delta)\}$

(v) $V(p;i) = \{w: w \hat{e} W \ \& \ p;i \ \hat{e} w\}$

(vi) $V(\eta) = q$.

Dermed har vi gitt den definisjonen av kanonisk modell som vi har i tankene. I denne definisjonen er det tanken at S enten er systemet KEη- eller KEη eller en utvidelse av et av disse to systemene.

Man må nå verfisere at en kanonisk modell <W,R,q,f,V> oppfyller kravene til en KE-modell. Dette kan gjøres på omtrent samme måte som tidligere, men man må verifisere at f, slik den er definert rett ovenfor, oppfyller kravet: f: (W-q) → Pt(Pt(W)). Dette ser man imidlertid ganske lett ved litt ettertanke.

Derimot er det nødvendig å gi et bevis for at det grunnleggende lemmaet holder, det som svarer til hovedlemma 6.2. Man må altså gi bevis for den følgende sats:

Lemma 10.1.1 La M=<W,R,q,f,V> være den S-kanoniske modellen for L. Da holder for alle wêW at $(M,w) \models \gamma \leftrightarrow \gamma$êw forutsatt at γ er en vilkårlig formel i L

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av formler i L. (a) Er γ en setningsvariabel eller setningskonstanten η blir beviset som tidligere, dvs. som i beviset for hovedlemma 6.2. Det samme gjelder om $\gamma = \neg\alpha$, eller en formel av typen $\alpha \rightarrow \beta$.

(b) Imidlertid må vi bevise på nytt at (1) $(M,w) \models T(\alpha) \leftrightarrow T(\alpha)$êw. I overenstemmelse med Definisjon 10.2 skiller vi mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): wêq. Da kan man gjennomføre beviset nesten nøyaktig på samme måte som det ble gjort i §6.

Tilfelle (ii): wê(W-q). Vi viser i dette tilfelle først at kondisjonalen mot høyre i (+) holder. (a) Anta (2) $(M,w) \models T(\alpha)$. Ved hjelp av valuasjonsregelen for T har man i dette tilfelle at (3) {w': (M,w') ⊨ α} ê f(w). Fra dette og definisjonen av f i Definisjon 10.1.1 følger at det må finnes en formel β i L slik at man har:

(4) {w': (M,w') ⊨ α} = {w': βêw'} & T(β)êw

Fra induksjonshypotesen følger at:

(5) {w': (M,w') ⊨ α} = {w': αêw'}

Fra dette og (4) kan man slutte at (6) {w': αêw'} = {w': βêw'}. Dette innebærer at (7) (Aw')(S-Max;k(w') → (αêw' ↔ βêw')). Anta nå for reduktio ad absurdum at $\neg (S|\text{-}\ \alpha\leftrightarrow\beta)$. Da har vi at $\{\neg(\alpha\leftrightarrow\beta)\}$ er en S-konsistent formelmengde, og at det derfor etter Lindenbaums sats finnes en maksimalt konsistent mengde w;0 slik at $(\neg(\alpha\leftrightarrow\beta))$êw;0. I lys av egenskapene til maksimalt konsistente mengder følger fra dette at $(\alpha\&\neg\beta)$v $(\beta\&\neg\alpha)$êw;0. I sin tur er dette ekvivalent med $(\alpha\&\neg\beta)$êw;0 v $(\beta\&\neg\alpha)$êw;0. I det første tilfelle har vi at αêw;0 & ¬(βêw;0). Men dette strider åpenbart mot (7). I det andre tilfelle har vi βêw;0 & ¬(αêw;0) som like åpenbart strider mot (7). Det er altså umulig at vi kan ha $\neg (S|\text{-}\ \alpha\leftrightarrow\beta)$. Det følger at $S|\text{-}\ \alpha\leftrightarrow\beta$. Siden RE nå forutsettes å være en slutningsregel i S kan man da slutte at $S\ |\text{-}\ (T(\alpha) \leftrightarrow T(\beta))$. Fra dette følger i sin tur, siden w er en maksimalt konsistent mengde, at $(T(\alpha) \leftrightarrow T(\beta))$êw. Men fra dette og den siste konjunkten i (4) kan man slutte ved hjelp av lemmaet om egenskaper til maksimalt konsistente mengder at T(α)êw. Dette er hva vi ønsker. Det har nå blitt bevist at $(M,w) \models T(\alpha) \rightarrow T(\alpha)$êw.

(b) Vi må også bevise kondisjonalen mot venstre i (1), dvs. T(α)êw → $(M,w) \models T(\alpha)$. Anta derfor Anta (8) T(α)êw. Sett per definisjon (9) X= {w': αêw'}. Da har vi åpenbart i lys av klausul (v) i definisjon10.1.1, samt det forhold at wê(W-q), og vi derfor må ha ¬(ηêw), at (10) Xêf(w). Ved hjelp av induksjonshypotesen har har man

(11) {w': (M,w') ⊨ α} = {w': αêw'}. Dette sammen med (9) og (10) gir oss: {w': (M,w') ⊨ α}êf(w). I sin tur impliserer dette i lys av valuasjonsregelen for T at $(M,w) \models T(\alpha)$ siden det i dette tilfelle forutsettes wê(W-q).

Dermed har vi fullført beviset for det mest vesentlig trinn i beviset for satsen ovenfor. **QED.**

På basis av resultatene ovenfor ser man at kalkylen KEη- er komplett med hensyn på klassen av KE-modellene. På tilsvarende måte kan man vise at systemet KEη som fremkommer fra Kη ved å legge til regelen RE er komplett med hensyn på den klassen av modeller som vi kalte KEη-modellene. Disse resultatene kan sammenfattes slik:

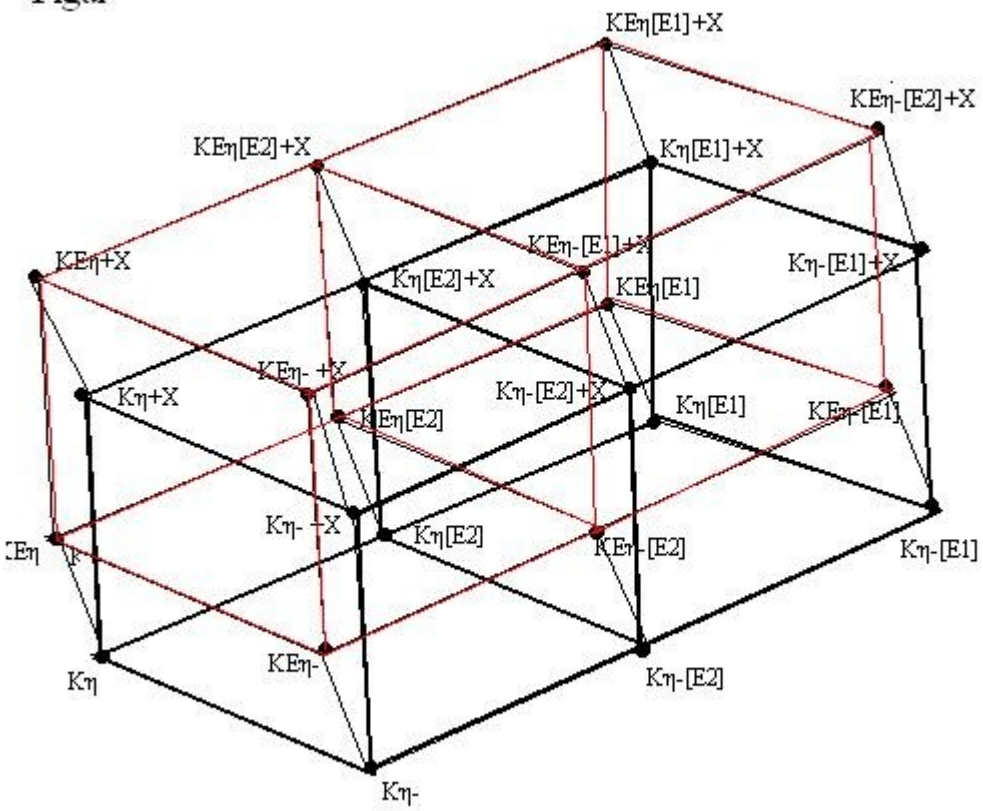
Teorem 10.1.2. (a) La C være klassen av av alle KE-modellene. Da har man at α er et teorem i KEη- hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell i C. (b) La C være klassen av alle KEη-modeller. Da har man at α er et teorem i KEη hvis og bare hvis α er gyldig i enhver modell i C.

Ta vi utgangspunkt i kalkylene KEη- og KEη er det nokså åpenbart at vi kan utvide dem med aksiomene E1 og E2. Vi får da fire nye kalkyler, KEη-[E1], KEη-[E2], KEη[E1] og KEη[E2]. De modellklassene som svarer til de to første er klassen av alle KE-modeller som oppfyller kravene til en strengt epistemisk modell, dvs. følgende to krav:

(1) (Aw)(wêq → wRw)
(2) (Aw)(wêW-q → (Ax)(xêf(w) → wêx))

Det er en enkel sak å vise at i alle KE -modeller (KEη-modeller) som oppfyller begge disse kravene er E1 gyldig og at i alle KE-modeller (KEη-modeller) som oppfyller bare det første kravet er E2 gyldig. Fullstendighetsbevisene skulle heller ikke by på problemer. At en kanonisk modell oppfyller kravene (1) og (2) hvis E1 inngår i den underliggende kalkylen bevises lett. Det samme gjelder at den kanoniske modell oppfyller kravet (2) om E2 inngår i den underliggende kalkylen. Det skulle også være klart at vi kan betrakte utvidelser av alle disse seks kalkylene av "KE"-familien ved å utvide dem med B1 og et eller flere av aksiomene B4,B5,B6, B7 og B9. Vi kan altså ta i betraktning de følgende kalkyler: KEη-+X, KEη+X, KEη-[E1]+X, KEη-[E2]+X, KEη[E1]+X og KEη[E2]+X. Fullstendigheten til alle disse kalkylene med hensyn til sine korresponderende modellklasser skulle derfor være lett å gjennomføre. Vi skal imidlertid ikke gjøre det her. Derimot avslutter vi med å presentere en figur som viser inklusjonsforholdene mellom praktisk talt alle de kalkylene som har figurert i dette skrift.

Figur



Figuren skal naturligvis tolkes på nøyaktig samme måte som de tilsvarende figurer som ble gitt mot slutten i §8 og §9.

Referanser

Chellas [1] Chellas, Brian F.1980.*Modal Logic, an Introduction*. London: Cambridge University Press

Hughes og Cresswell [1] Hughes,G.E og Cresswell, M.J.1968. *An Introduction to Modal Logic*. London: Methuen

Lemmon [1] Lemmon, E.J. (in collaboration with Dana S. Scott). *The "Lemmon notes": an introduction to modal logic* (edited by Krister Segerberg). *American philosophical quarterly* Monograph Series (edited by Nicholas Rescher), no. 11. Oxford: Basil Blackwell, 1977

Rognes [1] Rognes, Morten. 2007. *Noen syntaktiske derivasjoner i den doxastiske predikatlogikken Kη og enkelte beslektede kalkyler* Upublisert manus